

КОМПЛЕКС ТОО

СЭДВИЙН АГУУЛГА

- Комплекс тоо, түүн дээр хийгдэх үйлдлүүд
- Комплекс тооны тригонометрийн болон илтгэгч хэлбэр
- Зэрэгт дэвшүүлэх болон язгуураас гаргах
- Квадрат тэгшитгэлийн шийд

КОМПЛЕКС ТОО, ТҮҮН ДЭЭР ХИЙГДЭХ ҮЙЛДЛҮҮД

Хүн төрөлхтөн анх юмсыг тоолох, дугаарлах хэрэгцээнээсээ натурал тоог үүсгэсэн хэмээн үздэг. Энэхүү тоон дээрээ үйлдэл тодорхойлсноос үүдэлтэй, тухайлбал хасах үйлдлээс сөрөг бүхэл тоо, хуваах үйлдлээс бутархай рациональ тоо, мөн язгуураас гаргах үйлдлээс бидний өргөн ашигладаг иррациональ тоо бий болжээ.

Гэвч сөрөг тооноос тэгш зэргийн язгуур гаргах үйлдлийн хувьд гарах үр дүн нь бодит тоон талбар дээр тодорхойлогддоггүйг бид мэднэ. Тухайлбал $x^2 + 1 = 0$ тэгшитгэл бодит тоон талбар шийдгүй. Квадрат тэгшитгэлийн шийдийг олох уламжлалт аргаар бол $x_{1,2} = \pm\sqrt{-1}$ байх болно.

Хэрвээ энэ шийдийг тодорхой утгатай хэмээн үзвэл цаашид $x^2 + a^2 = 0$ тэгшитгэлийн шийдийг $x_{1,2} = \pm a\sqrt{-1}$ гэж тодорхойлж болно.

КОМПЛЕКС ТОО, ТҮҮН ДЭЭР ХИЙГДЭХ ҮЙЛДЛҮҮД

Тодорхойлолт. $x^2 + 1 = 0$ тэгшитгэлийн шийдийг тодорхойлж байгаа $i = \sqrt{-1}$ тоог бодит тоон талбар дээр нэмж оруулан, энэхүү i тоог **хуурмаг** нэгж хэмээн нэрлэнэ. Хуурмаг нэгжийн хувьд тодорхойлолт ёсоор $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$ байна.

Тодорхойлолт: Дурын бодит тоонууд x, y болон i хуурмаг нэгжийн хувьд

$$z = x + yi$$

хэлбэрийн тоог комплекс тоо гэнэ.

z комплекс тооны хувьд x -ийг түүний бодит хэсэг гээд $x = Re(z)$, y -ийг z комплекс тооны хуурмаг хэсэг гээд $y = Im(z)$ гэж тэмдэглэнэ. Комплекс тооны дээрх өгөгдсөн хэлбэрийг түүний алгебрийн хэлбэр гэнэ.

Жишээ 1. $z = 2 + 5i$ тооны бодит хуурмаг хэсгийг тодорхойл.

Бодолт. $Re(z) = 2, Im(z) = 5$ байна.

Тодорхойлолт. Комплекс тооны бодит хэсэг нь тэгтэй тэнцүү бол түүнийг цэвэр комплекс тоо гэнэ.

Тодорхойлолт. Хоёр комплекс тооны бодит, хуурмаг хэсгүүд нь харгалзан тэнцүү бол тэдгээрийг тэнцүү тоонууд гэнэ.

КОМПЛЕКС ТОО,
ТҮҮН ДЭЭР ХИЙГДЭХ ҮЙЛДЛҮҮД

Комплекс тоонуудыг нэмэх. $z_1 = x_1 + y_1i, z_2 = x_2 + y_2i$ комплекс тоонуудын хувьд тэдгээрийг нэмэх үйлдлийг дараах байдлаар тодорхойлно.

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

Жишээ 2. $z_1 = 5 + 2i, z_2 = -3 - 5i$ тоонуудын нийлбэрийг ол.

Бодолт. $z_1 + z_2 = (5 + 2i) + (-3 - 5i) = (5 + (-3)) + (2 + (-5))i = 2 - 3i$

Комплекс тоонуудыг хасах. $z_1 = x_1 + y_1i, z_2 = x_2 + y_2i$ комплекс тоонуудын хувьд тэдгээрийг хасах үйлдлийг дараах байдлаар тодорхойлно.

$$z_1 - z_2 = (x_1 + y_1i) - (x_2 + y_2i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

Жишээ 3. $z_1 = 6 + i, z_2 = 6 - 10i$ тоонуудын ялгаврыг ол.

Бодолт. $z_1 - z_2 = (6 + i) - (6 - 10i) = (6 - 6) + (1 - (-10))i = 11i$

КОМПЛЕКС ТОО,
ТҮҮН ДЭЭР ХИЙГДЭХ ҮЙЛДЛҮҮД

Комплекс тоонуудыг үржих. $z_1 = x_1 + y_1i, z_2 = x_2 + y_2i$ комплекс тоонуудын хувьд тэдгээрийг үржүүлэх үйлдлийг дараах байдлаар тодорхойлно.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i) = x_1x_2 + y_1x_2i + x_1y_2i + y_1y_2i^2 = \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i \end{aligned}$$

Жишээ 4. $z_1 = 6 + 5i, z_2 = -3 + i$ тоонуудын үржвэрийг ол.

Бодолт. $z_1 + z_2 = (6 + 5i)(-3 + i) = -18 - 15i + 6i + 5i^2 = -23 - 9i$

Комплекс тоонуудыг хуваах. $z_1 = x_1 + y_1i, z_2 = x_2 + y_2i$ комплекс тоонуудын хувьд тэдгээрийг хуваах үйлдлийг дараах байдлаар тодорхойлно.

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + y_1i}{x_2 + y_2i} = \frac{x_1 + y_1i}{x_2 + y_2i} \cdot \frac{x_2 - y_2i}{x_2 - y_2i} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + (y_1x_2 - x_1y_2)i}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2)}{x^2 + y^2} + \frac{(y_1x_2 - x_1y_2)}{x^2 + y^2}i \end{aligned}$$

Жишээ 5. $z_1 = 2 + 3i, z_2 = 3 + 5i$ тоонуудын ноогдворыг ол.

Бодолт. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3i}{3+5i} \cdot \frac{3-5i}{3-5i} = \frac{6+9i-15i-15i^2}{9+15i-15i-25i^2} = \frac{6+15}{34} + \frac{9-10}{34}i = \frac{21}{34} - \frac{1}{34}i$

КОМПЛЕКС ТОО,
ТҮҮН ДЭЭР ХИЙГДЭХ ҮЙЛДЛҮҮД

Комплекс тоон дээр тодорхойлсон үйлдлүүдийн хувьд дараах чанарууд биелэнэ.

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
2. $z_1 z_2 = z_2 z_1$
3. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
4. $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$
5. $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$

Хосмог комплекс тоо, хосмоглох үйлдэл. $\bar{z} = x - yi$ тоог $z = x + yi$ комплекс тооны хосмог тоо гэнэ. Өгсөн тооны хосмогийг олох үйлдлийг хосмоглох үйлдлэл гэнэ.

Хосмоглох үйлдлийн хувьд дараах чанарууд биелэнэ.

1. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
2. $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
3. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
4. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

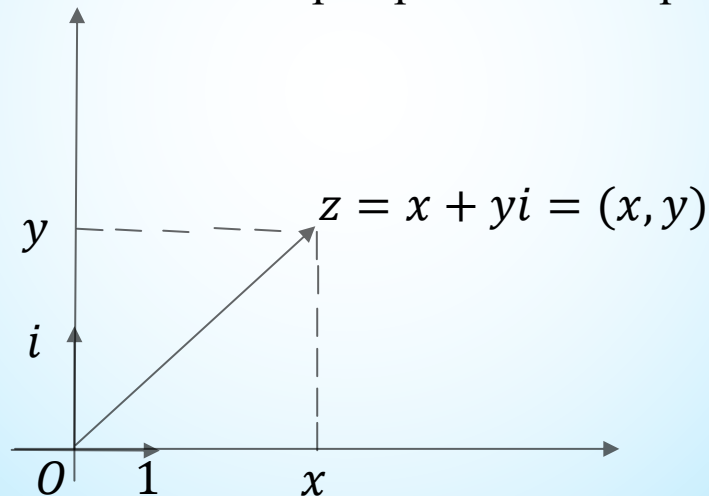
Жишээ 6. $z = 2 + 5i$ тооны хосмог тоог ол.

Бодолт. $\bar{z} = 2 - 5i$ болно.

КОМПЛЕКС ТОО, ТҮҮН ДЭЭР ХИЙГДЭХ ҮЙЛДЛҮҮД

Тодорхойлолт. Дурын $z = x + yi$ комплекс тоо бүрийг координатын хавтгайн (x, y) координаттай цэгээр дүрсэлж болно. Уг хавтгайг комплекс хавтгай гэнэ. Комплекс хавтгайн Ox тэнхлэгийг бодит тэнхлэг, Oy тэнхлэгийг хуурмаг тэнхлэг гэнэ.

$z = x + yi$ комплекс тоог хавтгай дээр дараах байдлаар дүрсэлнэ.



Тодорхойлолт. Дээрх радиус векторын уртыг уг комплекс тооны модуль гэнэ.

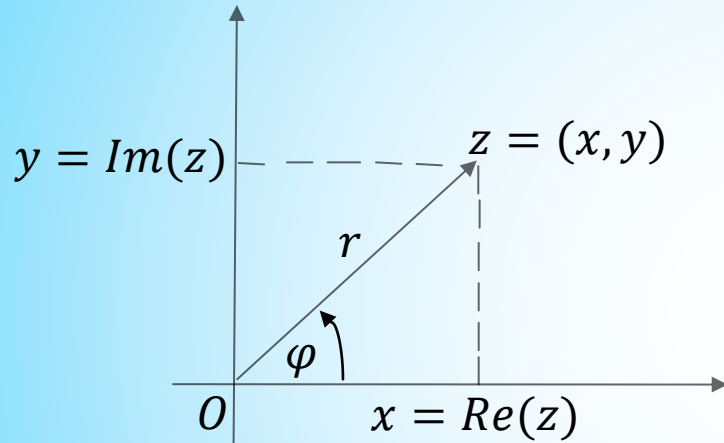
$z = x + yi$ комплекс тооны модуль нь $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ байна.

Жишээ 7. $z = 6 - 8i$ тооны модулийг ол.

Бодолт. $|z| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10$

КОМПЛЕКС ТООНЫ ТРИГОНОМЕТР БОЛОН ИЛТГЭГЧ ХЭЛБЭР

Комплекс хавтгайд туйлын координатын системийг дараах байдлаар оруулъя.



Уг зургаас туйлын радиус болон туйлын өнцөг нь тэгш өнцөгт координатын системийн координатуудаар

$$\begin{cases} r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \text{tg}\varphi = \frac{y}{x} \end{cases}$$

гэж тодорхойлогдоно.

Харин туйлын радиус хийгээд өнцгөөр декартын координатууд

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\varphi \end{cases}$$

гэж илэрхийлэгдэнэ. Эндээс $z = x + yi$ комплекс тоог туйлын координатын системд

$$z = x + yi = r \cdot \cos\varphi + i \cdot r \cdot \sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

гэж илэрхийлж болно.

КОМПЛЕКС ТООНЫ ТРИГОНОМЕТР БОЛОН ИЛТГЭГЧ ХЭЛБЭР

Тодорхойлолт. $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ хэлбэрийг комплекс тооны тригонометр хэлбэр гэнэ.

Үүнд:

- $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ комплекс тооны модуль
- φ -г комплекс тооны аргумент гээд $\varphi = \text{Arg}(z)$ гэж тэмдэглэнэ.

Дурын комплекс тооны хувьд $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ байх φ өнцгийг аргументийн гол утга гэж нэрлээд $\varphi = \arg(z)$ гэж тэмдэглэх бөгөөд дараах томъёогоор тодорхойлно.

$$\arg(z) = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & -\infty < x < \infty, y \geq 0 \\ \arctg \frac{y}{x} + \pi, & -\infty < x < \infty, y < 0 \end{cases}$$

Комплекс тоог тригонометр хэлбэрт шилжүүлэхдээ түүний аргументыг гол утгаар нь төлөөлүүлдэг.

Жишээ 8. $z = 2 + 2i$ комплекс тоог тригонометр хэлбэрт бич.

Бодолт. $|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\varphi = \arctg \frac{2}{2} = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$.

Иймд уг комплекс тооны тригонометр хэлбэр нь

$$z = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \right) \text{ болно.}$$

КОМПЛЕКС ТООНЫ ТРИГОНОМЕТР БОЛОН ИЛТГЭГЧ ХЭЛБЭР

Жишээ 9. $z = 2 - 2i$ комплекс тоог тригонометр хэлбэрт бич.

Бодолт. $|z| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{-2}{2}\right) + \pi = \operatorname{arctg}(-1) = \frac{3\pi}{4} + \pi = \frac{7\pi}{4}.$$

Иймд уг комплекс тооны тригонометр хэлбэр нь

$$z = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + \sin \frac{7\pi}{4} \right) \text{ болно.}$$

Санамж: Уг комплекс тоо нь комплекс хавтгайн дөрөвдүгээр мөчид орших тул түүний гол аргумент $\frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$ завсар байх ёстой гэдгийг анхаарах хэрэгтэй юм.

Жишээ 10. $z = -2i$ комплекс тоог тригонометр хэлбэрт бич.

Бодолт. $|z| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2, \varphi = \frac{3\pi}{2}$ тул уг комплекс тооны тригонометр хэлбэр нь

$$z = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + \sin \frac{3\pi}{2} \right) \text{ болно.}$$

Жишээ 11. $z = 2$ комплекс тоог тригонометр хэлбэрт бич.

Бодолт. $|z| = \sqrt{2^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2, \varphi = 0$ тул уг комплекс тооны тригонометр хэлбэр нь

$$z = 2(\cos 0 + \sin 0) \text{ болно.}$$

КОМПЛЕКС ТООНЫ ТРИГОНОМЕТР БОЛОН ИЛТГЭГЧ ХЭЛБЭР

Комплекс тооны үржих хуваах үйлдлийг түүний тригонометрийн хэлбэрийн хувьд гүйцэтгэвэл илүү хялбар байдаг.

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

комплекс тоонуудын хувьд

Үржүүлэх үйлдэл. $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

Хуваах үйлдэл. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

гэж тодорхойлогдоно.

Жишээ 12. $z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$, $z_2 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ комплекс тоонуудын хувьд үржүүлэх, хуваах үйлдлүүдийг гүйцэтгэ.

Бодолт. $z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) \right) = 4 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

КОМПЛЕКС ТООНЫ ТРИГОНОМЕТР БОЛОН ИЛТГЭГЧ ХЭЛБЭР

Теорем. Тригонометрийн болон илтгэгч функцүүдийн хооронд $e^{i\varphi} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)$ холбоо оршин байна. Энэ томъёог Эйлерийн томъёо гэнэ.

Тодорхойлолт. Эйлерийн томъёонд тулгуурлан комплекс тоог

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r \cdot e^{i\varphi}$$

хэлбэрээр бичиж болох бөгөөд үүнийг комплекс тооны илтгэгч хэлбэр гэнэ.

Жишээ 13. $z = -1 + \sqrt{3}i$ комплекс тоог илтгэгч хэлбэрт бич.

Бодолт. $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{-1} = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$.

Иймд уг комплекс тооны илтгэгч хэлбэр нь

$$z = 2 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ болно.}$$

$z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$ илтгэгч хэлбэрийн комплекс тоонуудын хувьд

Үржүүлэх үйлдэл. $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

Хуваах үйлдэл. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$ гэж тодорхойлогдоно.

КОМПЛЕКС ТООГ ЗЭРЭГТ ДЭВШҮҮЛЭХ БОЛОН ЯЗГУУР ГАРГАХ

Комплекс тоог зэрэгт дэвшүүлэх. Дурын комплекс тооны натурал n зэрэг нь

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

томъёогоор тодорхойлогдоно. Энэ томъёог Муаврын томъёо гэнэ.

Жишээ 14. $z = 2(\cos \frac{2\pi}{3} + i\sin \frac{2\pi}{3})$ тооны z^2, z^5 –г ол.

Бодолт.

$$z^2 = 2^2 \cdot \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i\sin \frac{4\pi}{3}\right) = 4 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i\sin \frac{4\pi}{3}\right) = -2 - 2\sqrt{3}i$$

$$z^5 = 2^5 \cdot \left(\cos \frac{10\pi}{3} + i\sin \frac{10\pi}{3}\right) = 32 \left(\cos \frac{10\pi}{3} + i\sin \frac{10\pi}{3}\right) = -16 - 16\sqrt{3}i$$

КОМПЛЕКС ТООГ ЗЭРЭГТ ДЭВШҮҮЛЭХ БОЛОН ЯЗГУУР ГАРГАХ

Комплекс тооноос язгуур гаргах. Тэгээс ялгаатай $z_0 = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$ комплекс тооны натурал n зэргийн язгуур нь n ялгаатай утгатай байна.

Язгууруудыг бичвэл:

$$\eta_k = \sqrt[n]{r_0} \left(\cos\left(\frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n}\right) \right), k = 0, 1, \dots, n - 1$$

болно.

Дурын комплекс тоо z –ийн ялгаатай n язгуурт харгалзах тоонууд нь комплекс хавтгайн координатын эх дээр төвтэй $\sqrt[n]{|z|}$ радиустай тойрогт багтсан зөв n өнцөгтийн оройн цэгүүд байдаг. Энэ олон өнцөгтийн эхний орой нь $\left(\sqrt[n]{|z|}, \frac{\varphi_0}{n}\right)$ координаттай цэгт харгалзана.

КОМПЛЕКС ТООГ ЗЭРЭГТ ДЭВШҮҮЛЭХ БОЛОН
ЯЗГУУР ГАРГАХ

Жишээ 15. $z_0 = -64$ тоо өгөгдсөн бол $\sqrt[3]{z_0}$ –г ол.

Бодолт. Өгөгдсөн тоог тригонометр хэлбэрт шилжүүлбэл

$$z_0 = 64(\cos\pi + i\sin\pi)$$

болно. Эндээс $r_0 = 64$, $\varphi_0 = \pi$ тул язгуур нь :

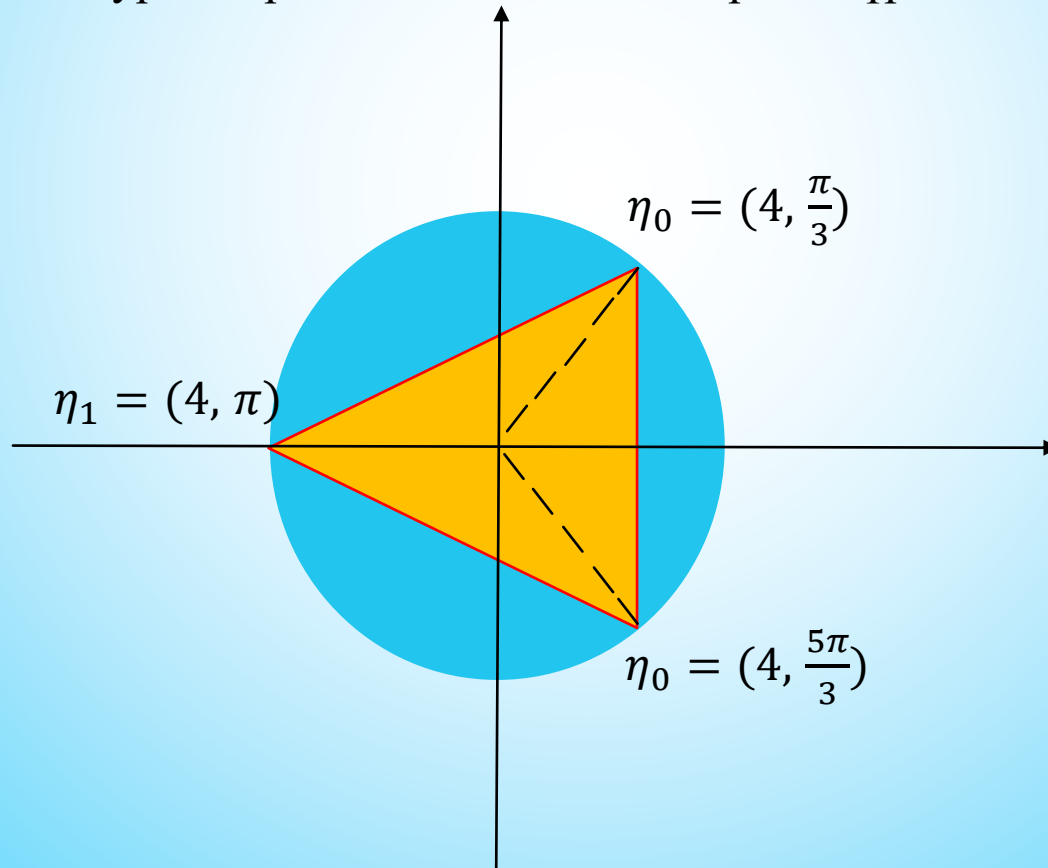
$$\eta_k = \sqrt[3]{64} \left(\cos\left(\frac{\pi+2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2\pi k}{3}\right) \right), k = 0, 1, 2$$

болно. Язгуур тус бүрийг бичвэл:

$$\begin{cases} \eta_0 = 4 \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \right) = 2 + 2\sqrt{3}i, & k = 0 \\ \eta_1 = 4(\cos\pi + i\sin\pi) = -2, & k = 1 \\ \eta_2 = 4 \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} \right) = 2 - 2\sqrt{3}i, & k = 2 \end{cases}$$

КОМПЛЕКС ТООГ ЗЭРЭГТ ДЭВШҮҮЛЭХ БОЛОН ЯЗГУУР ГАРГАХ

Эдгээрийг комплекс хавтгай дээр дүрсэлбэл дөрөв радиустай тойрог дээр орших зөв гурвалжны гурван оройн цэг байна. Тэдгээрийг дүрсэлбэл:



КВАДРАТ ТЭГШИТГЭЛИЙН ШИЙД

Бодит тоон коэффициенттой гүйцэт бус квадрат тэгшитгэл болох $x^2 + a^2 = 0$ тэгшитгэл нь комплекс тоон талбар дээр $x_{1,2} = \pm |a|i$ шийдтэй болно. Шийдийн тригонометр хэлбэр нь

$$x_{1,2} = |a| \left(\cos \frac{\pi}{2} \pm \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

болно.

Хэрэв $ax^2 + bx + c = 0$ тэгшитгэлийн дискриминант нь тэгээс бага бол түүний шийдийг комплекс тоон талбар дээр

$$x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{|b^2 - 4ac|} \cdot i}{2a}$$

гэж тодорхойлж болно.

Жишээ 16. $-x^2 + x - 1 = 0$ тэгшитгэлийн шийдийг ол.

Бодолт. $D = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = -3 < 0$ тул уг тэгшитгэл комплекс шийдтэй. Шийдийг олбол

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3} \cdot i}{-2}$$

болно.

Анхаарал хандуулсанд баярлалаа.