СЭЗИС-ийн ХМСТ-ийн математикийн мэргэжлийн баг

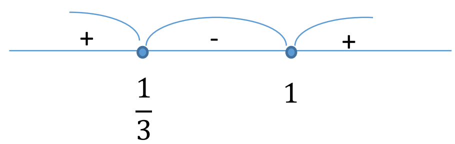
“МАТЕМАТИКИЙН ӨӨРИЙГӨӨ СОРИХ СОРИЛ -5”

сорилын нөхөх тестийн бодлогуудын бодолт:

Бодлого 2.1. $f(x)=3x^3-6x^2+3x+5$ функц нь $\left]-\infty\,;\frac{1}{3}\right[\cup\left][\![a]\!]\,;\infty\right[$ завсарт өсөж , $\left]\frac{1}{3}\,;[\![a]\!]\right[$ завсарт буурна. Тухайн функцийн $[0\,;3]$ хэрчим дээрх хамгийн бага утга нь $[\![b]\!]$, хамгийн их утга нь $[\![cd]\!]$ байна. $f(x)=0$ тэгшитгэл нь $[\![e]\!]$ ширхэг бодит шийдтэй.

<u>Бодолт:</u> Функцийн уламжлал нь 0-ээс их байх завсарт функц өсөж, 0-ээс бага байх завсарт функц буурдаг тул өгөгдсөн функцийн уламжлалыг олбол

$f'(x)=(3x^3-6x^2+3x+5)'=9x^2-12x+3$ болно Энэ кв функц нь эерэг сөрөг байх завсрыг олохын тулд 0-тэй тэнцүүлэн шийдийг олбол $9x^2-12x+3=0$ гэдгээс $3x^2-4x+1=0$ болох ба шийд нь $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=1$ байна.



Эндээс $x\in\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[\cup\left]1;\infty\right[$ завсар дээр функц өсөж, харин $x\in\left]\frac{1}{3}\;;1\right[$ завсар дээр функц буурна.

Иймд $[\![a]\!]=1$ болно.

Өсөөд буурч байгаа тул $x_1=\frac{1}{3}$ цэг нь функцийн max-ийн цэг, харин буураад өсөж байгаа тул $x_2=1$ нь функцийн min-ийн цэг байна. Мөн $[0\,;3]$ хэрчим дээр дээрх хоёр экстремумын цэг 2-уулаа орж байгаа учир эдгээр цэгүүд дээрх экстремумын утгуудыг хэрчмийн захын цэгүүд дээрх функцийн утгуудтай харьцуулснаар хэрчим дээрх экстремумын утгыг тодорхойлдог.

Иймд хэрчмийн төгсгөлийн цэгүүд дээрх функцийн утгууд нь

$f(0)=3\cdot0^3-6\cdot0^2+3\cdot0+5=5$, $f(3)=3\cdot3^3-6\cdot3^2+3\cdot3+5=41$

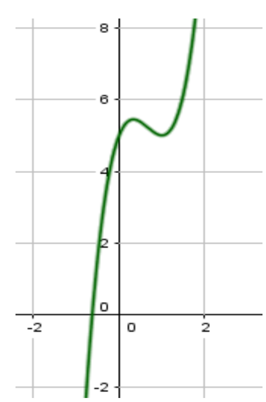
болно.

Харин экстремумын цэгүүд дээрх функцийн утгууд нь

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3-6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+3\cdot\frac{1}{3}+5=\frac{49}{9}=5\frac{4}{9}\,,$$

$$f(1)=3\cdot1^3-6\cdot1^2+3\cdot1+5=5$$

болох ба эдгээрийг харьцуулбал хамгийн их утга нь $f(3)=41$, харин хамгийн бага утга нь $f(0)=f(1)=5$ болж байна. Иймд $[\![b]\!]=5$, $[\![cd]\!]=41$ байна.



Функцийн графикийг тойм зургаас харвал

$x\in\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[$ завсарт өсөөд, хамгийн бага утга болон хамгийн их утгууд нь 0-ээс их байгаа учир ОХ-тэнхлэгийг нэг цэгээр огтлох буюу 1 ширхэг бодит шийдтэй. Иймд $[\![e]\!]=1$ байна.

Бодлого 2.2. $y = -3(cos2x + 1) + cosx - cos4x + 8cos^4x$ функцийн хамгийн их утга нь $[\![a]\!]$, хамгийн бага утга нь $-\frac{[\![b]\!]}{[\![c]\!]}$ ба $y = 0$ тэгшитгэлийн шийд нь $x_1 = \pi(2k + 1)$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{[\![d]\!]} + [\![e]\!]\pi k$ $(k \in \mathrm{Z})$ байна.

<u>Бодолт:</u> Нийлбэрийн косинусын томьёо болон үндсэн адилтгалыг ашиглавал

$cos2x = cos^2x - sin^2x = cos^2x - (1 - cos^2x) = 2cos^2x - 1$ болно. Үүнтэй адилаар

$cos4x = 2cos^2 2x - 1 = 2(2cos^2x - 1)^2 - 1 = 8cos^4x - 8cos^2x + 1$ болох ба орлуулан хялбарчилбал

$y = -3(cos2x + 1) + cosx - cos4x + 8cos^4x = -3(2cos^2x - 1 + 1) + cosx - (8cos^4x - 8cos^2x + 1)$

$+8cos^4x = -6cos^2x + cosx - 8cos^4x + 8cos^2x - 1 + 8cos^4x = 2cos^2x + cosx - 1$ болно.

$y = 2cos^2x + cosx - 1$ функцээс бүтэн кв ялгавал

$y = 2\left(cos^2x + \frac{1}{2}cosx - \frac{1}{2}\right) = 2\left(\left[cos^2x + 2 \cdot cosx \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right] - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) = 2\left(cosx + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$ болно.

Эндээс $cosx = 1$ үед функц хамгийн их утгаа авах буюу хамгийн их утга нь

$y_{max} = 2\left(1 + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8} = 2$ болох буюу $[\![a]\!] = 2$ байна.

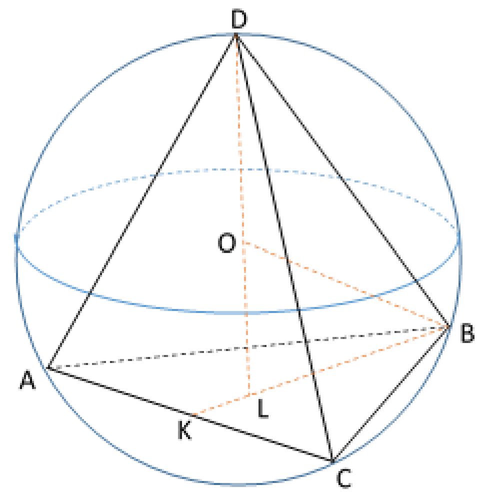
Харин $cosx = -\frac{1}{4}$ үед хамгийн бага утгаа авах буюу хамгийн бага утга нь

$y_{min} = 2\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8} = -\frac{9}{8}$ болох буюу $-\frac{[\![b]\!]}{[\![c]\!]} = -\frac{9}{8}$ байна.

Одоо $y = 2cos^2x + cosx - 1 = 0$ тэгшитгэлийг авч үзвэл $cosx = y$ гэвэл $2y^2 + y - 1 = 0$ гэсэн кв тэгшитгэл үүсэх ба шийд нь $y_1 = -1$, $y_2 = \frac{1}{2}$ болно. Эндээс $cosx = -1$ гэдгээс $x_1 = \pi(2k + 1)$ болох ба $cosx = \frac{1}{2}$ гэдгээс $x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ $(k \in \mathrm{Z})$ болох тул $[\![d]\!] = 3$, $[\![e]\!] = 2$ байна.

Бодлого 2.3. Зөв гурвалжин пирамидын өндөр 6, эзлэхүүн нь $24\sqrt{3}$ болно. Өгөгдсөн пирамидын суурийн талын урт нь $[\![a]\!]\sqrt{[\![b]\!]}$. Уг пирамидыг багтаасан бөмбөрцгийн радиус нь пирамидын өндрөөс бага бөгөөд урт нь $\frac{[\![c]\!][\![d]\!]}{[\![e]\!]}$ байна.

Бодолт:



Өгөгдсөн ёсоор пирамидын өндөр нь $DL = 6$, эзлэхүүн нь $V_{\text{пир}} = 24\sqrt{3}$ байгаа.

Пирамидын эзлэхүүн нь $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{\text{суурь}}$ байдаг тул $\frac{1}{3} \cdot 6 \cdot S_{\text{суурь}} = 24\sqrt{3}$ гэдгээс $S_{\text{суурь}} = 12\sqrt{3}$ болно.

Зөв гурвалжин пирамид гэсэн учир $AB = AC = BC = a$ гэе. Тэгвэл $AK = KC = \frac{a}{2}$ болно.

ΔBKC: $BK = \sqrt{BC^2 - KC^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ болох тул $S_{\text{суурь}} = \frac{AC \cdot BK}{2} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = 12\sqrt{3}$ гэдгээс $a^2 = 48$ буюу $a = 4\sqrt{3}$ болно. Иймд $BK = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 6$ байна. Мөн ABC нь зөв гурвалжин тул L нь медиануудын огтлолын цэг болох тул $BL = BK \cdot \frac{2}{3} = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$ байна.

Бөмбөрцгийн радиусыг $OD = OB = R$ гэвэл ΔOBL: $OB^2 = OL^2 + BL^2$ гэдгээс

$R^2 = (6 - R)^2 + 4^2$ буюу $R^2 = 36 - 12R + R^2 + 16$ гэдгээс $R = \frac{52}{12} = \frac{13}{3}$ болно.

Иймд $[\![a]\!] = 4$, $[\![b]\!] = 3$, $[\![c]\!] = 1$, $[\![d]\!] = 3$, $[\![e]\!] = 3$ байна.

Бодлого 2.4. $\{a_n\}$ гэсэн арифметик прогрессийн эхний n гишүүний нийлбэрийг S_n гэе. $a_1 = 87$, $a_{k+2} = -33$, $S_{k+2} = 567$ бол $k = [\![ab]\!]$ ба ялгавар нь $-[\![c]\!]$ байна. $n = [\![de]\!]$ үед S_n нь х.амгийн их утгатай байна.

<u>Бодолт:</u> Арифметик прогрессийн эхний n гишүүний нийлбэрийг $S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$ томьёогоор тодорхойлох тул $S_{k+2} = \frac{a_1+a_{k+2}}{2} \cdot (k+2)$ байна. Эндээс $567 = \frac{87+(-33)}{2} \cdot (k+2)$ болно гэдгээс

$k = 19$ гэж олдоно. Иймд $[\![a]\!] = 1$, $[\![b]\!] = 9$ байна.

$k = 19$ гэдгээс $a_{k+2} = a_{19+2} = a_{21} = -33$ ба $a_{21} = a_1 + 20d = 87 + 20d = -33$ тул

$d = -6$ байна. Иймд $[\![c]\!] = 6$ байна.

$S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1+d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{174-6(n-1)}{2} \cdot n = 90n - 3n^2 \rightarrow max$ байхын тулд

$S_n' = (90n - 3n^2)' = 90 - 6n = 0$ болно. Эндээс $n = 15$ болох бөгөөд $n < 15$ байх завсарт функц өсөж, $n > 15$ байх завсарт функц буурах тул $n = 15$ нь хамгийн их утганд хүргэдэг цэг байна.

Иймд $[\![d]\!] = 1$, $[\![e]\!] = 5$ байна.