



## СЭЗИС-ийн ХМСТ-ийн математикийн мэргэжлийн баг



### “МАТЕМАТИКИЙН ӨӨРИЙГӨӨ СОРИХ СОРИЛ -5”

#### сорилын сонгох тестийн 25-36-р бодлогуудын бодолт:

**Бодлого 25.** Айргийг хэдэн саванд хийж 3 тавиурт тэнцүү хэмжээтэй хуваан тавив. Эхний тавиур дээр 1 том ба 4 жижиг, 2 дахь тавиур дээр 2 том ба бас 6 литр, сүүлийн тавиур дээр 1 том, 3 жижиг савтай ба бас 3 литр айраг тавив. Том савнууд нь ижил, жижиг савнууд нв мөн ижил багтаамжтай бол нийт хэдэн литр айраг байсан бэ?

**Бодолт:** Том савны багтаамжийг  $-x$ , жижиг савны багтаамжийг  $-y$  гэж тэмдэглэе. Тэгвэл 1-р тавиур дээр  $x + 4y$ , 2-р тавиур дээр  $2x + 6$ , 3-р тавиур дээр  $x + 3y + 3$  гэсэн хэмжээтэй айргууд тавигдсан. Тавиур бүр дээрх айргийн хэмжээ тэнцүү тул

$$\begin{cases} x + 4y = 2x + 6 \\ x + 4y = x + 3y + 3 \end{cases} \text{ систем үүсэх ба 2-р тэгшитгэлээс } y = 3 \text{ гэж гарна. Үүнийг 1-р тэгшитгэлд}$$

орлуулбал  $x = 6$  болох тул нийт айргийн хэмжээ 1-р тавиур дээрх хэмжээг 3 дахин авсантай тэнцүү буюу  $3(x + 4y) = 3(6 + 4 \cdot 3) = 54$  (литр) гэсэн хариу гарч байна.

**Бодлого 26.** 50 км/ц болон 70 км/ц хурдтай 2 галт тэрэг параллель замаар эсрэг зүг рүү хөдөлж байв. 1-р галт тэргэнд сууж явсан хүний хажуугаар 2-р галт тэрэг 9 сек-д өнгөрөхийг тооцоолжээ. 2-р галт тэрэгний уртыг ол.

**Бодолт:** Галт тэргэнд сууж явсан хүнийг бэхэлсэн цэг гэж үзвэл 2-р галт тэрэг нь  $50\text{км/ц} + 70\text{км/ц} = 120\text{км/ц}$ -ийн хурдтайгаар явж өнгөрнө гэсэн үг юм. Өөрөөр хэлбэл 2-р галт тэрэгний урттай тэнцүү замыг  $120\text{км/ц}$ -ийн хурдтайгаар 9 сек-д туулж өнгөрнө гэсэнтэй адил болно. Иймд  $9\text{сек} = \frac{9}{3600}$  цаг учир  $l = 120 \frac{\text{км}}{\text{ц}} \cdot \frac{9}{3600} \text{ц} = 0.3\text{км} = 300\text{м}$  байна. Ө.х 2-р галт тэрэгний урт нь 300 м гэсэн хариу гарч байна.

**Бодлого 27.** А ба В хотоос нэгэн зэрэг угталцан гарсан 2 машин 5 цаг явсны дараа зөрж өнгөрөөгүй ба хоорондох зай нь 50 км болсон байв. Хэрэв бүх замыг нэг нь 15 цагт, нөгөө нь 10 цагт туулдаг бол энэ хоёр машины хурдны нийлбэрийг ол.

**Бодолт:** 15 цаг болон 10 цаг гэсэн хоёр үзүүлэлтийн ХБЕХ нь 30 тул бүх замыг  $30x$  гэе. Тэгвэл 1-р машин цагт  $30x : 15 = 2x$  зам, харин 2-р машин цагт  $30x : 10 = 3x$  зам туулна. Тэгвэл эдгээр машинууд нэг цагт хоорондоо  $2x + 3x = 5x$ -ээр ойртоно. Иймд бодлогын нөхцөл ёсоор  $5 \cdot 5x + 50 = 30x$  гэдгээс  $5x = 50$  буюу хурднуудын нийлбэр нь 50 км/ц гэсэн хариу гарч байна.

**Бодлого 28.** А, В ба С гэсэн ажилчдын бригад байв. А бригадын 4 хүний ажлыг В бригадын 5 хүн, харин В бригадын 3 хүний ажлыг С бригадын 8 хүн хийж дуусгадаг. Нэгэн ажлыг А бригадын 13 хүн, В бригадын 15 хүн хамтран 3 өдөрт хийж дуусгав. Тус ажлыг С бригадын 10 хүн хэдэн өдөрт хийж дуусгах вэ?

**Бодолт:** А, В, С бригадын нэг хүний нэг өдөрт хийх ажлыг харгалзан  $x, y, z$  гэе. Тэгвэл бодлогын нөхцөл ёсоор  $4x = 5y$ ,  $3y = 8z$  болох ба  $y = 8a$  гэж үзвэл  $z = 3a$ ,  $x = 10a$  болно. А болон В бригадыг ажилчдын хамтран гүйцэтгэсэн ажлын хэмжээ нь  $3(13x + 15y) = 3(13 \cdot 10a + 15 \cdot 8a) = 750a$  болох ба С бригадын 10 хүний нэг өдөрт хийх ажлын хэмжээ нь  $10z = 10 \cdot 3a = 30a$  болох тул  $750a : 30a = 25$  өдөр хийнэ гэсэн хариу гарч байна.

**Бодлого 29.** 20%-ийн 5 литр спиртийн уусмал дээр 7%-ийн 10 литр спиртийн уусмал болон 2 литр ус нэмэв. Хэдэн хувийн спиртийн уусмал үүсэх вэ?

**Бодолт:** Уусмалын хувийг тодорхойлохын тулд уусмал дахь бодисын цэвэр хэмжээг нийт уусмалын хэмжээнд харьцуулдаг. Иймд хамгийн сүүлийн уусмал дахь цэвэр спиртийн хэмжээ нь уусмал тус бүрдэх цэвэр спиртийн хэмжээнүүдийн нийлбэртэй тэнцүү буюу  $5 \cdot 0,2 + 10 \cdot 0,07 = 1,7$  л цэвэр спирт байна. Нийт уусмалын хэмжээ нь  $5+10+2=17$  л болох тул  $\frac{1,7}{17} = 0,1$  буюу 10%-ийн уусмал үүснэ гэсэн хариу гарч байна.

**Бодлого 30.**  $\vec{a}(1; 1; -2)$  ба  $\vec{b}(-1; -2; 3)$  векторуудад перпендикуляр бөгөөд  $\vec{x} \cdot (2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}) = 6$  гэсэн скаляр үржвэрийн нөхцлийг хангах  $\vec{x}$ -ийн уртыг ол.

**Бодолт:**  $\vec{x}$ -ийн координатуудыг  $(a; b; c)$  гэвэл  $\vec{x}$ -нь  $\vec{a}$ -тай перпендикуляр тул эдгээр векторуудын скаляр үржвэр нь 0 байна. Ө.х  $\vec{a} \cdot \vec{x} = 1 \cdot a + 1 \cdot b - 2 \cdot c = 0$  болно. Үүнтэй адил  $\vec{x}$ -нь  $\vec{b}$ -тай перпендикуляр тул  $\vec{b} \cdot \vec{x} = -1 \cdot a - 2 \cdot b + 3 \cdot c = 0$  байна. Мөн  $2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$  вектор нь  $(2; -3; 4)$  гэсэн координаттай болох тул  $\vec{x} \cdot (2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}) = 2a - 3b + 4c = 6$  болно. Эдгээр нөхцлүүд нэгэн

зэрэг биелнэ гэдгээс 
$$\begin{cases} a + b - 2c = 0 \\ -a - 2b + 3c = 0 \\ 2a - 3b + 4c = 6 \end{cases}$$
 гэсэн систем үүснэ. 1 ба 2-р тэгшитгэлүүдийг нэмбэл

$-b + c = 0$  болох ба 1-р тэгшитгэлийн -2-оор үржүүлэн 3-р тэгшитгэл дээр нэмбэл

$-5b + 8c = 6$  болно. Эндээс  $\begin{cases} -b + c = 0 \\ -5b + 8c = 6 \end{cases}$  систем үүсэх ба 1-р тэгшитгэлийн -5-аар үржүүлэн 2-р

тэгшитгэл дээр нэмбэл  $3c = 6$  гэдгээс  $c = 2$  гэж гарна. Эндээс  $b = 2$  болох ба 1-р тэгшитгэлд

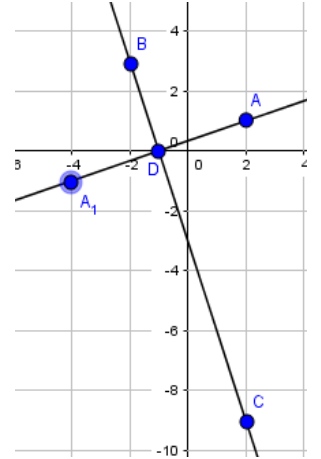
орлуулбал  $a = 2$  болно. Иймд  $\vec{x}(2; 2; 2)$  координаттай болох буюу энэ векторын урт нь  $|\vec{x}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$  гэсэн хариу гарч байна.

**Бодлого 31.**  $A(2; 1)$  цэгийн  $B(-2; 3)$  ба  $C(2; -9)$  цэгүүдийг дайрсан шулуунтай тэгш хэмтэй байх цэгийн координатуудын үржвэрийг ол.

**Бодолт:**

$BC$  шулууны тэгшитгэлийг бичвэл  $\frac{x+2}{2+2} = \frac{y-3}{-9-3} \Rightarrow y = -3x - 3$  болно. Одоо  $A$  цэгийг дайрсан  $BC$  шулуунтай перпендикуляр  $l$  шулууны тэгшитгэлийг бичье. Энэ шулууны тэгшитгэлийг  $y = kx + b$  гэе. Харилцан перпендикуляр шулуунуудын өнцгийн коэффициентүүдийн үржвэр нь  $-1$  байдаг учир  $-3k = 1$  гэдгээс бичих гэж байгаа  $l$  шулууны өнцгийн коэффициент нь  $k = \frac{1}{3}$  болно.

Иймд  $l: y = \frac{1}{3}x + b$  болох ба энэ шулуун нь  $A$  цэгийг дайран гарах тул  $A$  цэгийн координатууд нь энэ шулууны тэгшитгэлийн шийд болно. Орлуулбал  $1 = \frac{1}{3} \cdot 2 + b$  гэдгээс  $b = \frac{1}{3}$  болох буюу  $l: y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$  болно.



Одоо  $BC$  шулуун болон  $l$  шулуунуудын огтлолын цэг болох  $D$  цэгийн координатыг олбол

$\begin{cases} y = -3x - 3 \\ y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases}$  системийг бодох хэрэгтэй бөгөөд шийд нь  $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$  буюу  $D(-1; 0)$  координаттай цэг

үүснэ. Бидний олох ёстой цэгийг  $A_1$  гэвэл зурган дээрээс  $A$  ба  $A_1$  цэгүүдийн дундаж нь  $D$  цэг болох тул дундаж цэгийн координат нь захын цэгүүдийн координатуудын дундажтай тэнцүү байдаг. Иймд

$A_1(x; y)$  гэвэл  $\begin{cases} \frac{x+2}{2} = -1 \\ \frac{y+1}{2} = 0 \end{cases}$  гэдгээс  $\begin{cases} x = -4 \\ y = -1 \end{cases}$  болно. Эндээс  $A_1$  цэгийн координатуудын үржвэр нь

$xy = -4 \cdot (-1) = 4$  гэсэн хариу гарч байна.

**Бодлого 32.** Тэгш өнцөгт параллелопипедийн эзлэхүүн  $54 \text{ см}^3$ , бүтэн гадаргуун талбай нь  $90 \text{ см}^2$  бол урт, өргөн, өндрийн харгалзах урвуу хэмжигдэхүүнүүдийн нийлбэрийг ол.

**Бодолт:** Тэгш өнцөгт параллелопипедийн урт, өргөн, өндрийг харгалзан  $a, b, c$  гэвэл  $V = abc = 54$ ,

$S_{\text{б.гад}} = 2(ab + bc + ca) = 90$  болно. Бүтэн гадаргуун талбайг биеийн эзлэхүүнд харьцуулбал

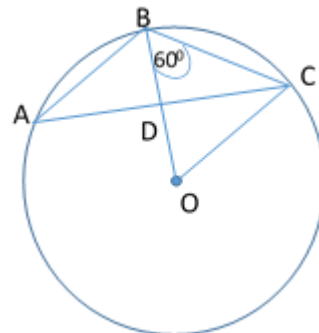
$\frac{S_{\text{б.гад}}}{V} = \frac{2(ab+bc+ca)}{abc} = 2 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \frac{90}{54}$  болох буюу  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{45}{54} = \frac{5}{6}$  гэсэн хариу гарч байна.

**Бодлого 33.** Орой дахь өнцөг нь  $120^\circ$  байх адил хажуут гурвалжныг багтаасан тойргийн диаметр 8 бол гурвалжны хажуу талын уртыг ол.

**Бодолт:**

Багтаасан тойргийн төвийг  $O$  гье. Тойргийн диаметр 8 тул радиус нь  $OA = OB = 4$  байна.  $AC$  болон  $OB$  –ийн огтлолыг  $D$  гэвэл  $BD$  нь  $B$  оройн биссектрис болох тул  $\angle OBC = \angle BCO = 60^\circ$  болно. Иймд  $\angle BOC = 60^\circ$  болох буюу гурвалжин  $BOC$  нь зөв гурвалжин болох тул энэ гурвалжны талууд нь бүгд тэнцүү байна.

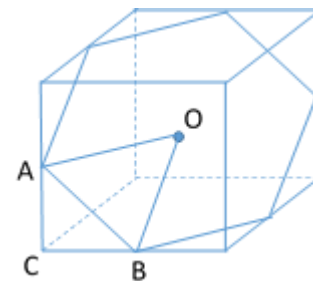
Эндээс  $BC = OC = 4$  гэсэн хариу гарна.



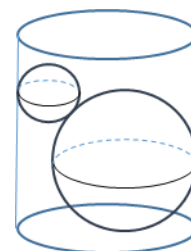
**Бодлого 34.** Кубын ирмэг 6 см урттай ба түүнийг хавтгайгаар огтлоход огтлолд нь зөв зургаан өнцөгт үүссэн бол уг зургаан өнцөгтийн талбайг ол.

**Бодолт:**

Зөв зургаан өнцөгт үүсэхийн тулд огтлол нь ирмэгийн дунджийг дайрах ёстой болно. Иймд үүссэн зураглалаас харахад кубын ирмэг нь 6 см гэдгээс  $AC = BC = 3$  см байна. Эндээс  $AB = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$  болно. Зөв зургаан өнцөгтийн төвийг  $O$  гэвэл  $\angle AOB = 60^\circ$  болох ба зөв зургаан өнцөгтийн тал нь радиустайгаа тэнцүү байдаг. Иймд радиус нь  $OA = OB = 3\sqrt{2}$  см болох тул  $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2}\sqrt{3}$  байна. Эндээс зөв зургаан өнцөгтийн талбай нь  $S = 6 \cdot S_{\triangle AOB} = 6 \cdot \frac{9}{2}\sqrt{3} = 27\sqrt{3}$  гэсэн хариу гарна.

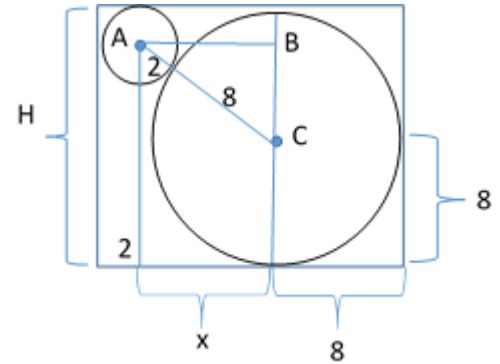


**Бодлого 35.** 2 см ба 8 см радиустай хоёр бөмбөгийг зурагт харуулснаар 9 см радиустай цилиндр саванд байрлуулав. Хоёр бөмбөгийг далд ортолх хэмжээнд цилиндрт ус хийсэн бол усны эзлэх хэмжээг ол.



**Бодолт:**

Цилиндрийн суурийн радиус 9 см тул диаметр нь 18 см болно. Зурган дээрээс харвал  $2+x+8=18$  гэдгээс  $x=8$  см байна.  $ABC$  гурвалжны хувьд  $AB = 8$ ,  $AC = 2 + 8 = 10$  болох тул Пифагорын теорем ёсоор  $BC^2 = AC^2 - AB^2 = 10^2 - 8^2 = 6^2$  гэдгээс  $BC = 6$  байна. Иймд 2 бөмбөгийг далд ортолх хэмжээн дэх усны өндрийг  $H$ -гэвэл  $H = 8 + 6 + 2 = 16$  болно. Эндээс усны эзлэхүүн нь  $H$ -өндөртэй цилиндрийн эзлэхүүнээс бөмбөгүүдийн эзлэхүүнийг хассантай тэнцүү байна.  
 $V_{\text{цилиндр}} = H \cdot S_{\text{суурь}} = H \cdot \pi r^2 = 16 \cdot \pi \cdot 9^2 = 1296\pi$

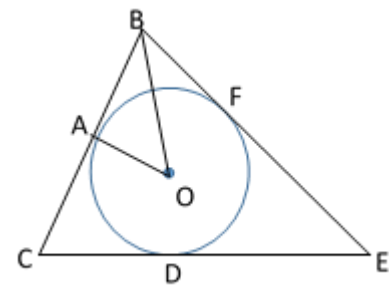


Харин бөмбөгийн эзлэхүүн нь  $V_{\text{бөмбөг}} = \frac{4}{3}\pi R^3$  томъёогоор тодорхойлогдох тул том бөмбөгийн эзлэхүүн нь  $V_{\text{том бөмбөг}} = \frac{4}{3}\pi \cdot 8^3 = \frac{2048}{3}\pi$ , харин жижиг бөмбөгийн эзлэхүүн нь  $V_{\text{жижиг бөмбөг}} = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \frac{32}{3}\pi$  болно гэдгээс усны эзлэхүүн нь  $V_{\text{ус}} = V_{\text{цилиндр}} - V_{\text{том бөмбөг}} - V_{\text{жижиг бөмбөг}} = 1296\pi - \frac{2048}{3}\pi - \frac{32}{3}\pi$  болох буюу  $V_{\text{ус}} = \frac{1808}{3}\pi$  гэсэн хариу гарна.

**Бодлого 36.** Гурвалжны  $60^\circ$ -өнцгийн эсрэг орших тал 12 см, уг гурвалжинд багтсан тойргийн радиус 3 см бол талбайг ол.

**Бодолт:**

Бодлогын нөхцөл ёсоор зурган дээр  $\angle CBE = 60^\circ$ ,  $CE = 12$  гэж өгөгдсөн. Эндээс  $\angle ABO = 30^\circ$  болно.  
 $ABO$  гурвалжны хувьд  $\text{Ctg}30^\circ = \frac{AB}{AO} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AB}{3} \Rightarrow AB = 3\sqrt{3}$  болно. Иймд  $AB = BF = \sqrt{3}$  байна.  
 $AC = CD = x$ ,  $FE = DE = y$  гэвэл  $CD + DE = x + y = 12$  тул гурвалжны периметр нь  $P = BC + BE + CE = AB + BF + FE + ED + DC + CA = 2(AB + x + y) = 2(3\sqrt{3} + 12) = 24 + 6\sqrt{3}$  болно.



Гурвалжны талбайг олох томъёонуудаас багтсан тойргийн радиус болон хагас периметрээр илэрхийлсэн томъёогоор талбай нь  $S = pr = \frac{P}{2}r = \frac{24+6\sqrt{3}}{2} \cdot 3 = 36 + 9\sqrt{3}$  гэсэн хариу гарч байна.