“МАТЕМАТИКИЙН ӨӨРИЙГӨӨ СОРИХ СОРИЛ -5”

сорилын сонгох тестийн 13-14-р бодлогуудын бодолт:

Бодлого 13. $\frac{2x+1}{x}+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots=\frac{11}{2}$ тэгшитгэлийн шийдүүдийн нийлбэрийг $|x|<1$ үед ол.

Бодолт: Өгөгдсөн тэгшитгэлийг $2+\frac{1}{x}+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots=\frac{11}{2}$ буюу $1+\left(\frac{1}{x}+1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots\right)=\frac{11}{2}$ гэж хувиргавал өгөгдсөн тэгшитгэл нь $\frac{1}{x}+1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots=\frac{9}{2}$ болох ба тэгшитгэлийн зүүн гар тал нь төгсгөлгүй буурах геометр прогресс болох учир нийлбэрийн томьёо ёсоор $\frac{1}{x}+1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots=\frac{\frac{1}{x}}{1-x}$ болох буюу анхны тэгшитгэл нь $\frac{1}{x(1-x)}=\frac{9}{2}$ гэсэн тэгшитгэлд шилжинэ. Эндээс $9x^2-9x-2=0$ гэсэн кв тэгшитгэл үүсэх бөгөөд шийдүүд нь $x_1=\frac{1}{3}$ ба $x_2=\frac{2}{3}$ байна.Иймд шийдүүдийн нийлбэр нь $x_1+x_2=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$ болно.

Бодлого 14. $\sqrt{4\sqrt{4\sqrt{6\sqrt{6\sqrt{4\sqrt{4\sqrt{6\sqrt{6\ldots}}}}}}}}$ утгыг ол.

Бодолт: $\sqrt{4\sqrt{4\sqrt{6\sqrt{6\sqrt{4\sqrt{4\sqrt{6\sqrt{6\ldots}}}}}}}}=A$ гэе. Тэгвэл

$A=4^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{\frac{1}{2^2}}\cdot 4^{\frac{1}{2^5}}\cdot 4^{\frac{1}{2^6}}\cdot\ldots\cdot 6^{\frac{1}{2^3}}\cdot 6^{\frac{1}{2^4}}\cdot 6^{\frac{1}{2^7}}\cdot 6^{\frac{1}{2^8}}\cdot\ldots=4^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\cdots}\cdot 6^{\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^8}+\cdots}$ болох ба тус бүрийн илтгэгчийг тооцоё.

(a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\cdots=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^9}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^{10}}+\cdots\right)=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2^4}}+\frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2^4}}=\frac{8}{15}+\frac{4}{15}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$

(б) $\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^8}+\cdots=\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^{11}}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{2^{12}}+\cdots\right)=\frac{\frac{1}{2^3}}{1-\frac{1}{2^4}}+\frac{\frac{1}{2^4}}{1-\frac{1}{2^4}}=\frac{2}{15}+\frac{1}{15}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

Иймд $A=4^{\frac{4}{5}}\cdot 6^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{8}{5}}\cdot 6^{\frac{1}{5}}=2\cdot 2^{\frac{3}{5}}\cdot 6^{\frac{1}{5}}=2(2^3\cdot 6)^{\frac{1}{5}}=2\cdot\sqrt[5]{48}$ болно.

Бодлого 15. $\int_0^1 \ln(x^2+1)dx = ?$

Бодолт: Өгөгдсөн интеграл нь таблицын хялбар интеграл биш, мөн интегралчлах дүрмээр бодогдох боломжгүй тул $\boldsymbol{\int_a^b UdV = (UV)\Big/_a^b - \int_a^b VdU}$ томьёогоор тодорхойлогдох “**хэсэгчлэх аргыг**” хэрэглэе.

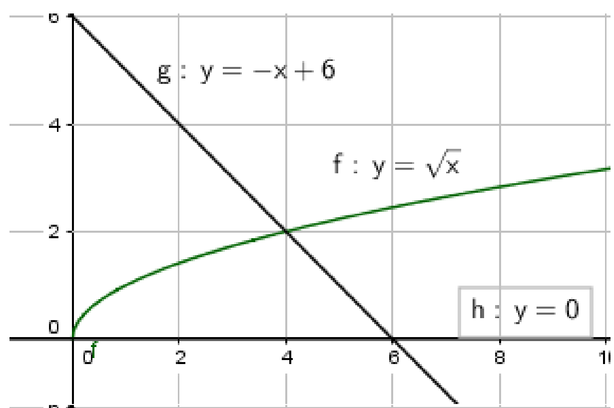
$$\int_0^1 \ln(x^2+1)dx = \left| \begin{matrix} U = \ln(x^2+1) & \Longrightarrow & dU = (\ln(x^2+1))'dx = \frac{2x}{x^2+1}dx \\ dV = dx & & V = x \end{matrix} \right| = x\ln(x^2+1)\Big/_0^1 -$$

$$-2\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}dx = [1\cdot\ln(1^2+1) - 0\cdot\ln(0^2+1)] - 2\int_0^1 \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}dx = ln2 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx =$$

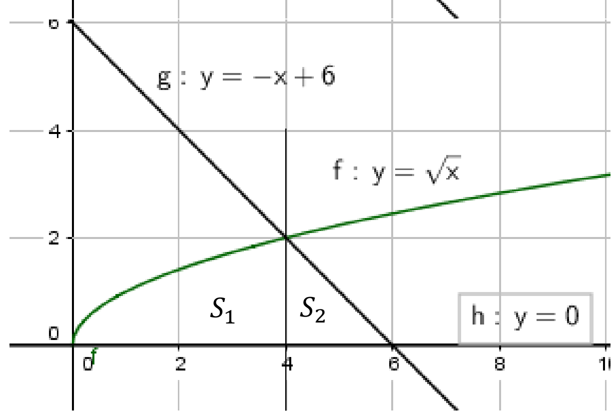
$$= ln2 - 2(x - arctgx)\Big/_0^1 = ln2 - 2 + \frac{\pi}{2}$$ гэсэн хариу гарна.

Бодлого 16. $y = \sqrt{x}$, $y = 6 - x$, $y = 0$ шугмуудаар хүрээлэгдсэн дүрсийн талбайг ол.

Бодолт: Дүрсийн талбайг тодорхой интеграл ашиглан олдог бөгөөд тодорхой интегралын хилүүдийг нь зөв тогтоохын тулд өгөгдсөн шугмуудаар хүрээлэгдсэн мужыг зөв дүрслэх нь зүйтэй байдаг. Иймд өгөгдсөн шугмуудаар хүрээлэгдсэн мужыг дүрсэлбэл дараах зураглал үүснэ.



Энэ муж нь OX тэнхлэгийн хувьд зөв муж биш учир $y = \sqrt{x}$ болон $y = 6 - x$ шулуунуудын огтлолын цэгийг дайруулан OY тэнхлэгтэй параллель шулуунаар 2 муж болгон хуваавал эдгээр мужууд нь тус бүрдээ OX тэнхлэгийн хувьд зөв муж болно.



$y = \sqrt{x}$ болон $y = 6 - x$ шулуунуудын огтлолын цэгийн абсциссийг олохын тулд

$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = 6 - x \end{cases}$ системтийг бодох бөгөөд энэ системээс

$x = 4$ гэсэн шийд гарна.

S_1 ба S_2 мужууд нь тус бүрдээ OX тэнхлэгийн хувьд зөв муж болох учир тус бүрийн талбайг олоод нэмэхэд анхны дүрсийн талбай гарна. Иймд

$$S = S_1 + S_2 = \int_0^4 \sqrt{x}dx + \int_4^6 (6-x)dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big/_0^4 + \left(6x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_4^6 = \frac{16}{3} + 2 = \frac{22}{3}$$ гэсэн хариу гарна.

Бодлого 17. $\sin(arccos0.6) = a$ бол $\lim\limits_{x\to a}\frac{1-\cos(20x-16)}{25x^2-40x+16}$ хязгаар бод.

Бодолт: $\sin(arccosx) = \sqrt{1-x^2}$ байдаг тул $\sin(arccos0.6) = \sqrt{1-(0.6)^2} = 0.8 = a$ байна. Иймд $\lim\limits_{x\to 0,8}\frac{1-\cos(20x-16)}{25x^2-40x+16}$ хязгаарын хувьд x –ийн оронд 0,8-г орлуулахад $\frac{0}{0}$ гэсэн тодорхойгүй хэлбэр үүсэх тул энэхүү хязгаарыг бодохын тулд хязгаарын доорхи функцдээ хувиргалт хийн 1-р гайхамшигт хязгаарыг ашиглая. Хүртвэрийн хосмогоор бутархайн хүртвэр, хуваарийг үржүүлбэл

$$\lim_{x\to 0,8}\frac{1-\cos(20x-16)}{25x^2-40x+16} = \lim_{x\to 0,8}\frac{1-\cos(20x-16)}{25x^2-40x+16}\cdot\frac{1+\cos(20x-16)}{1+\cos(20x-16)} = \lim_{x\to 0,8}\frac{1^2-\cos^2(20x-16)}{25x^2-40x+16}\cdot\frac{1}{1+\cos(20x-16)} =$$

$$= \lim_{x\to 0,8}\frac{\sin^2(20x-16)}{(5x-4)^2}\cdot\frac{1}{1+\cos(20x-16)} = \lim_{x\to 0,8}\frac{\sin^2(20x-16)}{(5x-4)^2\cdot 4^2}\cdot\frac{4^2}{1+\cos(20x-16)} = \lim_{x\to 0,8}\frac{\sin^2(20x-16)}{(20x-16)^2}\cdot\frac{4^2}{1+\cos(20x-16)} =$$

$$= \lim_{x\to 0,8}\left(\frac{\sin(20x-16)}{20x-16}\right)^2\cdot\frac{4^2}{1+\cos(20x-16)} = |\text{орлуулбал}| = 1^2\cdot\frac{16}{1+1} = 8$$ гэсэн хариу гарна.

Бодлого 18. $arcCtg2 + arctg\frac{1}{3}$ илэрхийллийн утгыг ол.

Бодолт: $arcCtg2 + arctg\frac{1}{3} = A$ гэж тэмдэглэе. Энэ тэнцэтгэлийн 2 талаас тангенс авбал

$$tgA = tg\left(arcCtg2 + arctg\frac{1}{3}\right) = \frac{tg(arcCtg2)+tg(arctg\frac{1}{3})}{1-tg(arcCtg2)\cdot tg(arctg\frac{1}{3})} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1$$ болно. Эндээс $tgA = 1$ гэдгээс $A = \frac{\pi}{4}$ байна.

Бодлого 19. $sin^2\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ утгыг ол.

Бодолт: Зэрэг бууруулах $sin^2 = \frac{1-cos2x}{2}$ томьёо болон cosx- нь тэгш функц болохыг ашиглавал

$$sin^2\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1-\cos(-\frac{\pi}{6})}{2} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$ гэсэн хариу гарна.

Бодлого 20. $sinA + sin^2A = 1$ ба $a\cdot cos^{12}A + b\cdot cos^{10}A + c\cdot cos^8A + d\cdot cos^6A - 1 = 0$ бол $\frac{b+c}{a+d}$ илэрхийллийн утгыг ол.

Бодолт: Өгөгдсөн нөхцлөөс $sinA = 1 - sin^2A = cos^2A \implies sin^2A = cos^4A$ болох ба эдгээрийг анхны нөхцөлд орлуулбал $sinA + sin^2A = cos^2A + cos^4A = 1$ болно. Одоо 2 талыг нь куб зэрэгт дэвшүүлбэл $1^3 = (cos^2A + cos^4A)^3 = cos^{12}A + 3cos^{10}A + 3cos^8A + cos^6A$ болох тул

$cos^{12}A + 3cos^{10}A + 3cos^8A + cos^6A - 1 = 0$ ба

$a\cdot cos^{12}A + b\cdot cos^{10}A + c\cdot cos^8A + d\cdot cos^6A - 1 = 0$ гэдгээс $a = 1, b = 3, c = 3, d = 1$ болно.

Иймд илэрхийллийн утга нь $\frac{b+c}{a+d} = \frac{3+3}{1+1} = 3$ гэсэн хариу гарна.

Бодлого 21. $3sinx - 2cos^2x \geq 0$ тэнцэтгэл бишийн $[-\pi\,; 2\pi]$ завсар дахь шийдийн олонлогийг ол.

Бодолт: $3sinx - 2cos^2x \geq 0 \implies 3sinx - 2(1 - sin^2x) \geq 0 \implies 2sin^2x + 3sinx - 2 \geq 0$ болох ба $sinx = y$ гэвэл $2y^2 + 3y - 2 \geq 0$ тэнцэтгэл биш үүснэ. Энэ тэнцэтгэл бишийн шийд нь $y \in \left]-\infty;\ -2\right] \cup \left[\frac{1}{2}\ ;\ \infty\right[$ болно. Эндээс $y = sinx \leq -2$ үед шийдгүй тул $y = sinx \geq \frac{1}{2}$ тэнцэтгэл бишийн шийдийг олбол $\frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ болно. Өгөгдсөн завсар дээрх шийдийн олонлог нь $k = 0$ үед $\left[\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{5\pi}{6}\right]$ гэсэн хариу гарна.

Бодлого 22. $\left(\sqrt{2x} + \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{2}}\right)^{10}$ биномын задаргааны x^4 −г агуулсан гишүүний коэффициентийг ол.

Бодолт: $(a + b)^n$ бином задаргаа нь n+1 ширхэг нэмэгдэхүүнтэй бөгөөд $(k + 1)$ −р нэмэгдэхүүн нь $T_{k+1} = C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$ байдаг. Манай бодлогын хувьд $a = \sqrt{2x}$, $b = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{2}}$, $n = 10$ тул орлуулбал $C_{10}^k \cdot \left(\sqrt{2x}\right)^{10-k} \cdot \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{2}}\right)^k = A \cdot x^4$ байна. Эндээс $x^{5-\frac{1}{2}k} \cdot x^{\frac{k}{3}} = x^4$ тул $k = 6$ гэж гарна. Иймд коэффициент нь $A = C_{10}^6 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^4 \cdot 2^{-3} = 105$ гэсэн хариу гарч байна.

Бодлого 23. Зоосыг 10 удаа орхиход 6 удаад нь сүлд буух магадлалыг ол.

Бодолт: Зоосыг шидэх болгонд сүлд буух магадлал нь ижил байх учир 10 шидэлтийн аль нэг 6-д нь сүлд буух магадлалыг олохдоо Бернуллийн томьёог ашигладаг. $\boldsymbol{P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}}$ Бодлогын нөхцлөөс $n = 10,\ p = 0.5\ , k = 6$ болох тул $P_{10}(6) = C_{10}^6 \cdot (0.5)^6 \cdot (0.5)^4 = \frac{105}{512}$ гэсэн хариу гарч байна.

Бодлого 24. 1-р хайрцагт 3 улаан , 5 шар бөмбөг, 2-р хайрцагт 4 улаан 3 шар бөмбөг байв. Бөмбөгнүүд бүгд ижил хэмжээтэй бөгөөд харалгүйгээр 1-р хайрцагнаас 1 бөмбөг авч 2-р хайрцагт хийж холиод, мөн харалгүйгээр 2-р хайрцагнаас 1 бөмбөг авахад тэр нь улаан өнгөтэй байх магадлалыг ол.

Бодолт: 1-р хайрцагнаас улаан эсвэл шар өнгийн бөмбөг гарч 2-р хайрцаг руу орохоос хамааран 2-р хайрцагнаас улаан бөмбөг гарах магадлал нь өөрчлөгдөнө. Иймд 2-р хайрцагнаас улаан бөмбөг гарах үзэгдэл нь 1-р хайрцагнаас улаан бөмбөг гарах эсэхээс хамаарах тул нөхцөлт магадлал болно. Мөн 1-р хайрцагнаас улаан бөмбөг гарах болон шар бөмбөг гарах үеийн 2-р хайрцагнаас улаан бөмбөг гарах магадлалуудын нийлбэрээр 2-р хайрцагнаас улаан бөмбөг гарах магадлал тодорхойлогдох тул бүтэн магадлал болно. Ийид тус бүрийн магадлалыг тооцъё.

(а) 1-р хайрцагнаас улаан бөмбөг гарах магадлал нь $\frac{3}{8}$ болох бөгөөд 2-р хайрцагт хийхэд 5 улаан, 3 шар бөмбөгтэй болно. Энэ үед 2-р хайрцагнаас улаан бөмбөг гарах магадлал нь $\frac{5}{8}$ болох тул нөхцөлт магадлалын дүрэм ёсоор 2-р хайрцагнаас улаан гарах магадлал нь $\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8}=\frac{15}{64}$ болно.

(б) 1-р хайрцагнаас шар бөмбөг гарах магадлал нь $\frac{5}{8}$ болох бөгөөд 2-р хайрцагт хийхэд 4 улаан, 4 шар бөмбөгтэй болно. Энэ үед 2-р хайрцагнаас улаан бөмбөг гарах магадлал нь $\frac{4}{8}$ болох тул нөхцөлт магадлалын дүрэм ёсоор 2-р хайрцагнаас улаан гарах магадлал нь $\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{8}=\frac{20}{64}$ болно.

Иймд бүтэн магадлал ёсоор 2-р хайрцагнаас улаан бөмбөг гарах магадлал нь эдгээрийн нийлбэр буюу $\frac{15}{64}+\frac{20}{64}=\frac{35}{64}$ гэсэн хариу гарч байна.