“МАТЕМАТИКИЙН ӨӨРИЙГӨӨ СОРИХ СОРИЛ -5”

сорилын сонгох тестийн 1-12-р бодлогуудын бодолт:

Бодлого 1. $\frac{2017}{2018}x - 990 \cdot 2.0(17) + 19 \cdot \log_{\frac{1}{7}}(\log_4 25 \cdot \log_{25} 16384) = \frac{3\cdot(0.(3)-0.3)}{0.1}$ тэгшитгэл бод.

__Бодолт:__ Эхлээд үет бутархайнуудыг энгийн бутархайд шилжүүлье. $2.0(17) = a$ гэвэл

$20.(17) = 10a$, $2017.(17) = 1000a$ болох ба хооронд нь хасвал $990a = 1997$ буюу $a = \frac{1997}{990}$

болно. Үүнтэй адилаар $0.(3) = \frac{1}{3}$ болно. Эдгээрийг орлуулбал өгөгдсөн тэгшитгэл нь

$\frac{2017}{2018}x - 990 \cdot \frac{1997}{990} + 19 \cdot \log_{\frac{1}{7}}(\log_4 25 \cdot \log_{25} 4^7) = \frac{3\cdot(\frac{1}{3}-\frac{3}{10})}{\frac{1}{10}}$ болох ба эмхэтгэж, логарифмийн суурь

солих томьёог санавал $\log_{25} 4^7 = \frac{\log_4 4^7}{\log_4 25} = \frac{7}{\log_4 25}$ болох ба орлуулбал

$\frac{2017}{2018}x - 1997 + 19 \cdot \log_{\frac{1}{7}}(\log_4 25 \cdot \frac{7}{\log_4 25}) = 1$ буюу

$\frac{2017}{2018}x - 1997 + 19 \cdot \log_{\frac{1}{7}} 7 = 1$ болно. Үүнийг эмхэтгэвэл $\frac{2017}{2018}x = 2017$ эндээс $x = 2018$

гэсэн хариу гарна.

Бодлого 2. $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ илэрхийллийн утгыг ол.

__Бодолт:__ $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = x$ гэе. Хоёр талыг нь 3 зэрэгт дэвшүүлбэл

$x^3 = \left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^3 = 4 - 3\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right) = 4 - 3x$ болох буюу

$x^3 + 3x - 4 = 0$ тэгшитгэл үүснэ. Үүнийг үржигдэхүүн болгон задалж бодвол

$x^3 + 3x - 4 = x^3 - x + 4x - 4 = x(x-1)(x+1) + 4(x-1) = (x-1)(x^2+x+4) = 0$ болох ба

тус бүрийг нь 0-тэй тэнцүүлэн бодвол $x^2 + x + 4 = 0$ тэгшитгэлийн дискриминант нь сөрөг гарна

гэдгээс шийдгүй тул $x - 1 = 0$ гэдгээс $x = 1$ гэсэн хариу гарна.

Бодлого 3. $\left||x^2-1|+6\right| = 9$ тэгшитгэлийн шийдийн тоог ол.

__Бодолт:__ Хэрэв $|a| = 9$ бол $a = 9$ эсвэл $a = -9$ байх модулийн чанар ёсоор

$\left[\begin{array}{l}|x^2-1|+6=9\\|x^2-1|+6=-9\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}|x^2-1|=3\\|x^2-1|=-15\end{array}\right.$ болно. Тооны модуль сөрөг биш байдаг тул 2 дахь тэгшитгэл $|x^2-1|=-15$ нь шийдгүй байна. Иймд $|x^2-1|=3$ тэгшитгэлийн хувьд дахин модулийн чанар ёсоор $\left[\begin{array}{l} x^2-1=3 \\ x^2-1=-3 \end{array}\right.$ болно. Мөн л 2 дахь тэгшитгэлийн хувьд $x^2=-2$ болох тул шийдгүй байна. Эндээс $x^2-1=3$ тэгшитгэлийн хувьд $x^2=4$ гэдгээс $x_1=-2$, $x_2=2$ гэсэн 2 шийдтэй. Иймд шийдийн тоо нь 2 байна.

Бодлого 4. $\frac{\sqrt{2x+2}-4x+|x+2|}{x^2+2x} \leq -2$ тэнцэтгэл бишийг бод.

<u>Бодолт:</u> Тодорхойлогдох муж нь $2x+2 \geq 0$ буюу $x \geq -1$ болно.

Тэнцэтгэл бишийг $\frac{\sqrt{2x+2}-4x+|x+2|}{x^2+2x}+2 \leq 0$ болгож ба ижил хуваарь өгч эмхэтгэвэл $\frac{\sqrt{2x+2}+2x^2+|x+2|}{x^2+2x} \leq 0$ болно. Хүртвэрийг авч үзвэл $\sqrt{2x+2}+2x^2+|x+2|$ нийлбэрийн нэмэгдэхүүн бүр нь сөрөг биш ба нэгэн зэрэг 0-тэй тэнцүү байж чадахгүй тул үргэлж эерэг буюу $\sqrt{2x+2}+2x^2+|x+2|>0$ байна. Иймд эерэг тоог сөрөг тоонд хуваахад сөрөг тоо гарах тул $x^2+2x<0$ байх хэрэгтэй болж байна. Иймд анхны тэнцэтгэл биш нь $x^2+2x<0$ гэсэн тэнцэтгэл биш рүү шилжиж байна. Энэ тэнцэтгэл бишийг бодвол $x \in]-2\,;0[$ болох ба тодорхойлогдох мужтай огтлолцуулбал өгөгдсөн тэнцэтгэл бишийг шийд нь $x \in [-1\,;0[$ болно.

Бодлого 5. $(x-4)^{x^2+5x} > (x-4)^{2x^2}$ тэнцэтгэл бишийг бод.

<u>Бодолт:</u> Тодорхойлогдох мужыг олбол $\begin{cases} x-4>0 \\ x-4 \neq 1 \end{cases}$ гэдгээс $\begin{cases} x>4 \\ x \neq 5 \end{cases}$ буюу $\boldsymbol{x} \in]\mathbf{4};\mathbf{5}[\, \cup \,]\mathbf{5};\infty[$ байна.

Өгөгдсөн тэнцэтгэл биш нь илтгэгч функцийн чанар ёсоор сууриас хамааран

$a.\ \begin{cases} x-4>1 \\ x^2+5x>2x^2 \end{cases}$ $b.\ \begin{cases} x-4<1 \\ x^2+5x<2x^2 \end{cases}$ гэсэн хоёр тохиолдолд салж бодогдоно.

Тус бүрд нь авч үзвэл:

(a) тохиолдолд $\begin{cases} x-4>1 \\ x^2+5x>2x^2 \end{cases}$ гэдгээс $\begin{cases} x>5 \\ x^2-5x<0 \end{cases}$ буюу $\begin{cases} x>5 \\ 0<x<5 \end{cases}$ болж шийдгүй болох нь харагдаж байна.

(b) тохиолдолд $\begin{cases} x-4<1 \\ x^2+5x<2x^2 \end{cases}$ гэдгээс $\begin{cases} x<5 \\ x^2-5x>0 \end{cases}$ буюу $\begin{cases} x<5 \\ x<0 \ \cup \ 5<x \end{cases}$ болно.

Эндээс шийд нь $x<0$ болох бөгөөд тодорхойлогдох муж болох $\begin{cases} x>4 \\ x \neq 5 \end{cases}$ завсартай огтлолцуулбал шийдгүй болох нь харагдаж байна.

Иймд өгөгдсөн тэнцэтгэл биш нь шийдгүй байна.

Бодлого 6. $3x^2-6x-7=0$ тэгшитгэлийн язгуурууд нь x_1 ба x_2 бол ${x_1}^3+{x_2}^3$ утгыг ол.

<u>Бодолт:</u> $\boldsymbol{x^2+px+q=0}$ тэгшитгэлийн хувьд $\begin{cases}\boldsymbol{x_1+x_2=-p}\\ \boldsymbol{x_1\cdot x_2=q}\end{cases}$ гэсэн Виетийн теоремийг ашиглая.

Өгөгдсөн тэгшитгэлийн 2 талыг 3-т хуваасж бичвэл $x^2-2x-\frac{7}{3}=0$ болох ба энэ үед

Виетийн теорем ёсоор $\begin{cases}x_1+x_2=2\\ x_1\cdot x_2=-\frac{7}{3}\end{cases}$ болно. Олох гэж буй илэрхийллийг шийдүүдийн нийлбэр болон үржвэрээр илэрхийлбэл

${x_1}^3+{x_2}^3=(x_1+x_2)({x_1}^2-x_1\cdot x_2+{x_2}^2)=(x_1+x_2)((x_1+x_2)^2-3x_1\cdot x_2)$ болох бөгөөд

орлуулбал ${x_1}^3+{x_2}^3=2\cdot\left(2^2-3\cdot\left(-\frac{7}{3}\right)\right)=2\cdot(4+7)=22$ болно.

Бодлого 7. $f\left(\frac{x+1}{x}\right)=2016x$ бол $f'(2017)$ утгыг ол.

<u>Бодолт:</u> Эхлээд $f(x)$ функцээ олоё. Үүний тулд $\frac{x+1}{x}=y$ гэж орлуулаад x −ээ олбол

$1+\frac{1}{x}=y$ гэдгээс $x=\frac{1}{y-1}$ болно. Анхны функцдээ орлуулбал $f(y)=2016\cdot\frac{1}{y-1}=\frac{2016}{y-1}$ болно.

Одоо y −ийн оронд x −г бичвэл $f(x)=\frac{2016}{x-1}$ гэсэн функц үүслээ.

Энэ функцээс уламжлал авбал $f'(x)=\left(\frac{2016}{x-1}\right)'=2016\cdot((x-1)^{-1})'=2016\cdot(-1)\cdot(x-1)^{-1-1}=$

$=-2016\cdot(x-1)^{-2}=-\frac{2016}{(x-1)^2}$ болох бөгөөд $x=2017$-г орлуулбал

$f'^{(2017)}=-\frac{2016}{(2017-1)^2}=-\frac{1}{2016}$ гэсэн хариу гарна.

Бодлого 8. $y=\lg\frac{3-x}{8+x}+\sqrt{(-x^2+x+6)|x+6|}$ функцийн тодорхойлогдох мужыг ол.

<u>Бодолт:</u> Тодорхойлогдох муж нь $\begin{cases}\frac{3-x}{8+x}>0\\ (-x^2+x+6)|x+6|\geq 0\end{cases}$ болох ба $|x+6|\geq 0$ учир

$\begin{cases}\frac{3-x}{8+x}>0\\ (-x^2+x+6)\geq 0\end{cases}$ тэнцэтгэл бишийг бодоход хангалттай. Гэхдээ $|x+6|=0$ буюу $x=-6$ –г эхний тэнцэтгэл биш руу орлуулан тавихад шийд болохыг анхаарах хэрэгтэй.

Хоёр тооны ногдвор болон үржвэрийн хувьд тэмдгүүд нь ижил байдаг тул дээрх систем нь

$\begin{cases}(3-x)(8+x)>0\\ x^2-x-6\le 0\end{cases}$ системтэй ижил байна.

Тэнцэтгэл биш тус бүрийг бодож интервалын аргаар шийдийг олбол $\begin{cases}-8<x<3\\ -2\le x\le 3\end{cases}$ болох бөгөөд огтлолцуулбал $-2\le x<3$ гэсэн завсар гарна. Дээр олсон $x=-6$ шийдийг нэгтгэн бичвэл тодорхойлогдох муж нь $x\in\{-6\}\cup[-2\,;3[$ байна.

Бодлого 9. $y=x^2+3x+6$ муруйн $y=x-2$ шулуунтай параллель байх шүргэгч шулууны тэгшитгэлийг бич.

<u>Бодолт:</u> Өгөгдсөн муруйн $M_0(x_0\,;\,y_0)$ цэгт татсан шүргэгч шулуун нь $y=x-2$ шулуунтай параллель тул өнцгийн коэффициентүүд нь ижил байна. Иймд $y=kx+b$ шулууны өнцгийн коэффициент нь k байдаг тул $y=x-2$ шулууны өнцгийн коэффициент нь $k=1$ байна.

Нөгөө талаар $y=f(x)$ муруйн $M_0(x_0\,;\,y_0)$ цэгт татсан шүргэгч шулууны өнцгийн коэффициент нь $k=f'(x_0)$ байдаг тул $f'(x)=(x^2+3x+6\ )'=1$ гэдгээс $2x+3=1$ буюу $x_0=-1$ гэж гарна. Үүнийг өгөгдсөн функцпээ орлуулбал харгалзах $y_0=f(x_0)=(-1)^2+3\cdot(-1)+6=4$ байна. Иймд шүргэгчийн тэгшитгэл нь $y-y_0=k(x-x_0)$ байдаг тул орлуулбал $y-4=1(x+1)$ буюу $y=x+5$ байна.

Бодлого 10. $y=ax^3+6ax^2+12x+10$ функц дурын x —ийн хувьд өсөж байхаар a —параметрийн бүх утгыг ол.

<u>Бодолт:</u> $a=0$ үед $y=12x+10$ функц дурын x —ийн хувьд өсдөг шулуун үүснэ.

Харин $a\ne 0$ үед $y'=(ax^3+6ax^2+12x+10)'=3ax^2+12ax+12\ge 0$ буюу $ax^2+4ax+4\ge 0$ үед функц өсөх бөгөөд энэ тэнцэтгэл биш дурын x —ийн хувьд биелж байхын тулд $\begin{cases}a>0\\ D\le 0\end{cases}$ байна. Иймд $D=16a^2-16a\le 0$ гэдгээс $a(a-1)\le 0$ буюу $a\in[0;1]$ байх үед дурын x —ийн хувьд функц өснө.

Бодлого 11. $y=-9+8sin2017x+6cos2017x$ функцийн утгын мужыг ол.

<u>Бодолт:</u> $Asinx+Bcosx=\sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}sinx+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}cosx\right)$ гэсэн хувиргалтыг ашиглавал өгөгдсөн функцийг $y=-9+10\left(\frac{8}{10}sin2017x+\frac{6}{10}cos2017x\right)$ хэлбэрт бичиж болно.

Энд $\frac{8}{10} = cosa$, $\frac{6}{10} = sina$ гэсэн орлуулга хийвэл

$$y = -9 + 10\left(\frac{8}{10}sin2017x + \frac{6}{10}cos2017x\right) = -9 + 10(cosa \cdot sin2017x + sina \cdot cos2017x) =$$

$= -9 + 10\sin(2017x + a)$ болно. Аливаа t –ийн хувьд $-1 \leq sint \leq 1$ байдаг тул

$-1 \leq \sin(2017x + a) \leq 1$ байна гэдгээс $-10 \leq 10\sin(2017x + a) \leq 10$ болно. Эндээс

$-9 - 10 \leq -9 + 10\sin(2017x + a) \leq -9 + 10$ тул утгын муж нь $-19 \leq y \leq 1$ байна.

Бодлого 12. $x = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6} + \cdots}}}$ бол x –ийн хувьд аль нь үнэн бэ?

<u>**Бодолт:**</u> Тэнцэтгэлийн хоёр талыг кв зэрэгт дэвшүүлбэл

$x^2 = 6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6} + \cdots}}$ болох ба баруун талын 2 дахь нэмэгдэхүүн нь мөн x –тэй тэнцүү болох тул орлуулбал $x^2 = 6 + x$ гэсэн квадрат тэгшитгэл үүснэ. Язгуурууд нь $x = -2$ ба $x = 3$ гарах ба x –нь эерэг тул $x = 3$ байна.