Нөхцөлт магадлал

<u>Сэдвийн агуулга</u>

- Нийцгүй үзэгдэл
- Хамааралгүй үзэгдэл
- Нөхцөлт магадлал
- Магадлалын нэмэх ба үржих дүрэм
- Бүтэн магадлал
- Байесийн томьёо

Нөхцөлт магадлал, магадлалын үржих дүрэм

Нийцгүй үзэгдлүүд. Нэгэн зэрэг явагдах боломжгүй үзэгдлүүдийг нийцгүй үзэгдлүүд гэнэ. Ө.х $AB = \emptyset$ байх А ба В үзэгдлүүдийг ***нийцгүй үзэгдлүүд*** гэнэ.

Хамааралгүй үзэгдлүүд. А үзэгдлийн явагдах эсэхээс үл хамааран В үзэгдлийн явагдах магадлал нь тогтмол байдаг бол эдгээр үзэгдлүүдийг ***хамааралгүй үзэгдлүүд*** гэнэ. Эсрэг тохиолдолд ***хамааралтай үзэгдлүүд*** гэнэ.

A ба **B** хамааралтай үзэгдлүүдийн хувьд **A** үзэгдэл явагдсан нөхцөлд **B** үзэгдлийн явагдах магадлалыг ***B үзэгдлийн A нөхцөл дэх магадлал*** гээд $P_A(B)$ эсвэл $P(B\backslash A)$ гэж тэмдэглэнэ. Үүнийг ***нөхцөлт магадлал*** гэж нэрлэдэг.

<u>Жишээ 1:</u> Ангид 8 эмэгтэй, 5 эрэгтэй оюутан байсан бөгөөд дараалан 2 оюутан сонгое.

а/ Эхний оюутан эмэгтэй байсан бол дараагийн оюутан нь эмэгтэй байх үзэгдлийн

б/ Эхний оюутан эрэгтэй байсан бол дараагийн оюутан нь эмэгтэй байх үзэгдлийн магадлалыг тус тус ол.

Бодолт:

Эхний оюутан эмэгтэй байх үзэгдлийг **А**-аар, харин хоёр дахь оюутан эмэгтэй байх үзэгдлийг **В**-ээр тэмдэглэе.

а/ Эхнийх нь эмэгтэй оюутан сонгогдсон тул хоёр дахь оюутан эмэгтэй байхын тулд үлдсэн 12 оюутны 7 эмэгтэй байна. Иймд эмэгтэй байх магадлал нь $P(B\backslash \mathrm{A}) = \frac{7}{12}$

б/ Эхнийх нь эрэгтэй оюутан сонгогдсон байх үзэгдэл нь $\overline{\mathrm{A}}$ болох тул үлдсэн 12 оюутны 8 эмэгтэй байна. Иймд эмэгтэй байх магадлал нь $P(B\backslash \overline{\mathrm{A}}) = \frac{8}{12}$.

Эндээс А ба В үзэгдлүүд нь хамааралтай үзэгдлүүд болно.

Дээрх жишээнээс нөхцөлт магадлалыг олох дүрэм нь

а) $P(B \backslash \mathrm{A}) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$ б/ $P(B \backslash \overline{\mathrm{A}}) = \dfrac{P(\overline{\mathrm{A}}B)}{P(\overline{\mathrm{A}})}$

гэж томьёологдоно.

Иймд нөхцөлт магадлалыг олох ерөнхий томьёо нь

$$\boldsymbol{P(B \backslash \mathrm{A}) = \frac{P(AB)}{P(A)}}$$

гэж тодорхойлогдох буюу

$$\boldsymbol{P(AB) = P(A)\, P(B \backslash \mathrm{A}) = P(\, B)\, P(A \backslash \mathrm{B})}$$

Үүнийг ***нөхцөлт магадлалын үржих дүрэм*** гэнэ.

Өмнөх хамааралтай үзэгдлүүдийн магадлалыг олох томьёог **A, B ,C** гэсэн гурван үзэгдлийн хувьд бичвэл

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B \backslash A) \cdot P(C \backslash AB)$$

болох бөгөөд аль ч эрэмбээр бичиж болно.

***Санамж*: Хэрэв A, B нь хамааралгүй үзэгдлүүд бол**

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

болох бөгөөд үүнийг хэдэн ч хамааралгүй үзэгдлийн хувьд өргөтгөн бичиж болно.

Бүтэн(гүйцэд) магадлал, магадлалын нэмэх дүрэм

Хэрэв туршилтын дүнд $A_1, A_2, \ldots, A_n$ үзэгдлүүдийн зөвхөн нэг нь явагддаг бөгөөд эдгээр үзэгдлүүд нь хос хосоороо нийцгүй бол $A_1, A_2, \ldots, A_n$-г ***үзэгдлүүдийн бүтэн бүлэг*** гэнэ. Үзэгдлүүдийн бүтэн бүлгийн хувьд

$$P(A_1) + P(A_2) + \ . \ . \ . + P(A_n) = 1$$

байдаг.

Хэрэв **B**-үзэгдэл нь $A_1, A_2, \ldots, A_n$ үзэгдлүүдийн бүтэн бүлгийн аль ч үзэгдэлтэй нь хамтран явагдах боломжтой бол **B** үзэгдэл явагдах магадлал нь **B** үзэгдэл явагдах боломжтой бүх магадлалуудын нийлбэртэй тэнцүү буюу

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B \backslash A_1) + P(A_2) \cdot P(B \backslash A_2) + . . . + P(A_n) \cdot P(B \backslash A_n)$$

томьёогоор бодогдох бөгөөд үүнийг ***бүтэн магадлалын томьёо*** гэнэ.

<u>Жишээ 2:</u> Нэгэн дэлгүүр 3 агуулахаас бүх бараагаа татдаг бөгөөд 1-р агуулахаас барааныхаа 20%-г , 2-р агуулахаас барааныхаа 30%-г , үлдсэн бараагаа 3-р агуулахаас татдаг. Эдгээр агуулахуудын бараа гологдол байх магадлал нь харгалзан 0.05 , 0.03 , 0.01 байдаг бол хэрэглэгчийн худалдан авсан бараа гологдол байх үзэгдлийн магадлалыг ол.

Бодолт:

Хэрэглэгчийн худалдан авсан бараа ***i***-р агуулахын бараа байх үзэгдлийг $\boldsymbol{A_i}$ гэе.

<u>/$\boldsymbol{A_i}$ нь бүтэн бүлэг үүсгэнэ./</u>

Энэ бараа гологдол байх үзэгдлийг **B** гэе. Ө.х худалдан авсан бараа аль ч агуулахынх байж болох тул $\boldsymbol{A_i}$ үзэгдлүүдийн алинтай ч хамтран явагдах боломжтой.

Үзэгдэл тус бүрийн хувьд магадлалуудыг тооцвол

$$P(A_1) = 20\% = 0.2 \quad \text{ба} \quad P(B \backslash A_1) = 0.05$$

$$P(A_2) = 30\% = 0.3 \quad \text{ба} \quad P(B \backslash A_2) = 0.03$$

$$P(A_3) = 50\% = 0.5 \quad \text{ба} \quad P(B \backslash A_3) = 0.01$$

/$P(A_1)$+$P(A_2)$+$P(A_3)$=1 байх ёстойг анхаар/

Хэрэглэгчийн худалдан авсан барааны гологдол байх магадлалыг

$$\boldsymbol{P(B) = P(A_1)P(B \backslash A_1) + P(A_2)P(B \backslash A_2) + P(A_3)\, P(B \backslash A_3)}$$

гэсэн бүтэн магадлалын томьёонд орлуулбал

$$P(B) = 0.2 \cdot 0.05 + 0.3 \cdot 0.03 + 0.5 \cdot 0.01 = 0.024$$

болно.

Ө.х дунджаар 1000 бараа тутмын 24 нь гологдол байна гэсэн үг юм.

Байесийн томьёо

Нөхцөлт магадлалын томьёо:

$$P(A_iB) = P(A_i)\,P(B\backslash A_i) = P(\,B)P(A_i\backslash B)$$

эндээс $$P(A_i\backslash B) = \frac{P(A_iB)}{P(\,B)} = \frac{P(A_i)\,P(B\backslash A_i)}{P(\,B)}$$ гэж гарна.

Бүтэн магадлалын томьёо:

$$P(B) = P(A_1)\cdot P(B\backslash A_1) + P(A_2)\cdot P(B\backslash A_2) + ... + P(A_n)\cdot P(B\backslash A_n)$$

Үүнийг нөхцөлт магадлалын томьёоны хуваарьт орлуулбал

$$P(A_i\backslash \mathrm{B}) = \frac{P(A_i)\,P(B\backslash \mathrm{A}_i)}{P(A_1)\cdot P(B\backslash A_1) + P(A_2)\cdot P(B\backslash A_2) + ... + P(A_n)\cdot P(B\backslash A_n)}$$

болох бөгөөд үүнийг ***Байесийн томьёо*** гэнэ.

Ө.х сонирхож буй үзэгдэл явагдсан үед нөхцөл болж байгаа үзэгдлүүдийн алинтай хамтран явагдсаныг тооцоолдог томьёог ***Байесийн томьёо*** *гэнэ.*

Жишээ 3: Нэгэн дэлгүүр 3 агуулахаас бүх бараагаа татдаг бөгөөд 1-р агуулахаас барааныхаа 20%-г , 2-р агуулахаас барааныхаа 30%-г , үлдсэн бараагаа 3-р агуулахаас татдаг. Эдгээр агуулахуудын бараа гологдол байх магадлал нь харгалзан 0.05 , 0.03 , 0.01 байдаг. Хэрэв хэрэглэгчийн худалдан авсан бараа гологдол байсан бол 3-р агуулахын гологдол бараа байх үзэгдлийн магадлалыг ол.

Бодолт: Хэрэглэгчийн худалдан авсан бараа гологдол байх үзэгдлийг B гэе. Энэ бараа ***i***-р агуулахын бараа байх үзэгдлийг A_i гэе. /A_i нь бүтэн бүлэг үүсгэнэ./

Өмнө нь тооцсон бүтэн магадлал ёсоор

$$P(B) = 0.2 \cdot 0.05 + 0.3 \cdot 0.03 + 0.5 \cdot 0.01 = 0.024$$

Байесийн томьёо ёсоор гологдол бараа 3-р агуулахынх байх магадлалыг

$$P(A_3 \backslash \mathrm{B}) = \frac{P(A_3)\cdot P(B \backslash A_3)}{P(A_1)\cdot P(B \backslash A_1)+P(A_2)\cdot P(B \backslash A_2)+P(A_3)\cdot P(B \backslash A_3)}$$

томьёонд орлуулбал

$$P(A_3 \backslash \mathrm{B}) = \frac{0.5\cdot 0.01}{0.024} = \frac{5}{24}$$ болно.

Үүнтэй яг адилаар та бүхэн өөрснөө хэрэглэгчийн худалдан авсан бараа

1-р , 2-р агуулахын бараа байх магадлалыг тус тус олоорой.

Анхаарлаа хандуулсанд баярлалаа