

Комбинаторикийн элементүүд

Сэдвийн агуулга

- Хослолын теорем буюу үржих дүрэм
- Буцаалттай түүвэр(давталттай гүйлгэмэл)
- Буцаалтгүй түүвэр(давталтгүй гүйлгэмэл)
- Сэлгэмэл
- Хэсэглэл
- Бүлгүүдэд хуваах буюу давталттай сэлгэмэл
- Давталттай хэсэглэл

Үндсэн ойлголт

Төгсгөлөг тооны элементийн бүх боломжит байрлал, сонголтын тоог судалдаг математикийн салбарыг **комбинаторик** буюу **хослолын онол** гэж нэрлэдэг. Комбинаторикт:

- Төгсгөлөг элементтэй хоёр ба түүнээс дээш олонлогоос тус бүрээс нь нэг, нэг элемент сонгож, олонлогийн тоотой тэнцүү урттай, олонлогийн дугаараар эрэмбэлэгдсэн элементүүдийн дарааллыг үүсгэе. Ийм элементүүдийн тоо хэд байх вэ ?.
 - Төгсгөлөг n элементтэй олонлогоос буцаалттай болон буцаалтгүй түүврийн схемээр бүрэлдэхүүнээрээ хийгээд эрэмбээрээ ялгаатай k -ширхэг элементтэй дэд олонлогийг хэдэн янзаар сонгож болох вэ ?
- гэх мэт бодлогууд тавигддаг.

Комбинаторикийн бодлого бодоход өргөн хэрэглэгддэг нэг ойлголт бол **факториал** юм.

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$$

Жишээлбэл:

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

Комбинаторикийн үндсэн дүрэм болох “үржих дүрэм”-ийг дараах бодлогын бодолт дээр тулгуурлан теорем байдлаар томъёлон авч үзье.

Бодлого: Бат, Цогт гэдэг хоёр хөвгүүн Наран, Туул, Энхээ гэдэг гурван охинтой хичнээн янзаар үерхэж болох вэ ?.

Энэ асуудлыг хослолын онол ашиглан шийдье. Энд Бат, Цогт гэсэн хоёр элементтэй хөвгүүдийн олонлог, харин Наран, Туул, Энхээ гэсэн гурван элементтэй охидын олонлог гэсэн 2 олонлог байна гэж сэтгэе.

Нэг хөвгүүн зөвхөн нэг л охинтой үерхэх ба хоёр ба түүнээс дээш охинтой нэгэн зэрэг үерхэхгүй. Хөвгүүн бүр охидуудын хэнтэй нь ч үерхэх боломжтой гэсэн нөхцлүүдийг тавья. Боломжит хосуудын нийт тоог олохдоо дараахь схемийг ашиглан тоольё. Үүний тулд хөвгүүдийн олонлогийн элементүүдийг багана болгож, охидын олонлогийн элементүүдийг мөр болгон тэгш өнцөгт хэлбэрийн хүснэгт байгуулан, хосуудыг харгалзах багана, морийн элементүүдээр үүсгэе.

	Наран	Туул	Энхээ
Бат	(Бат, Наран)	(Бат, Туул)	(Бат, Энхээ)
Цогт	(Цогт, Наран)	(Цогт, Туул)	(Цогт, Энхээ)

Эндээс энэ жишээний хувьд нийт боломжийн тоо $2 \cdot 3 = 6$ байна.

Энэ санаан дээр үндэслээд дараах теоремийг томъёолон авч үзье

Теорем 1: (Хосын теорем)

n -ширхэг элементтэй $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ олонлог ба m -ширхэг элементтэй $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_m\}$ олонлог өгөгдөв. Өгөгдсөн хоёр олонлогийн хувьд 1-р элемент нь A - олонлогийнх, 2-р элемент нь B - олонлогийнх байх эрэмбэлэгдсэн (a, b) хосын тоо нь $n \cdot m$ байна.

Баталгаа: Өмнөх бодлогын бодолттой яг адилаар батлагдана.

Жишээ 1: Нэг цифр нь тэгш, нөгөө цифр нь сондгой байх 2 оронтой тоо хичнээн байх вэ? .

Бодолт: Тэгш цифрүүдийн олонлогийг $\{0, 2, 4, 6, 8\}$, сондгой цифрүүдийн олонлогийг $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ гэвэл тус бүрдээ 5 элементтэй олонлог болно. Хэрэв 2 оронтой тоо нь тэгш цифрээр эхэлсэн бол “0” цифрээр эхлэхгүй тул $4 \cdot 5 = 20$ ширхэг, харин сондгой цифрээр эхэлсэн бол $5 \cdot 5 = 25$ ширхэг байх ба нийт $20 + 25 = 45$ ширхэг тоо байна.

Жишээ 2: 2 оронтой тоо нийт хэд байх вэ ?.

Бодолт: 2 оронтой тооны эхний орон нь $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ олонлогийн аль нэг элементээс, харин 2 дахь орон нь $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ олонлогийн аль нэг элементээс тогтоно. Иймд Теорем-1 ёсоор $9 \cdot 10 = 90$ ширхэг 2 оронтой тоо байна.

Энэхүү теорем 1-ийг өргөтгөн хэд хэдэн олонлогийн хувьд өргөтгөн дараах теоремийг томъёолж болно.

Теорем 2: (Хослолын теорем)

1-р олонлог нь n_1 ширхэг элементтэй, 2-р олонлог нь n_2 ширхэг элементтэй, гэх мэтчилэн k -р олонлог нь n_k ширхэг элементтэй олонлогууд өгөгдсөн байг. Тэгвэл эхний элемент нь 1-р олонлогийнх, дараагийн элемент нь 2-р олонлогийнх, гэх мэтчилэн сүүлийн элемент нь k -р олонлогийнх байх эрэмбэлэгдсэн (a_1, a_2, \dots, a_k) хэлбэрийн элементийн тоо нь $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ байна.

Жишээ 3: Автомашины дугаарын эхний 3 тэмдэгт нь үсэг, дараагийн 4 тэмдэгт нь тоо байдаг. Хамгийн олондоо хичнээн ялгаатай дугаар үүсгэж болох вэ?

Бодолт: Хэрэв монгол цагаан толгойн 35 үсгийг бүгдийг нь ашигладаг гэвэл эхний 3 тэмдэгт нь тус бүрдээ 35 боломжтой байна. Дараагийн 4 тэмдэгт нь тоо байна гэдгээс тус бүрдээ 10 боломжтой.

(Үсэг)	(Үсэг)	(Үсэг)	(Тоо)	(Тоо)	(Тоо)	(Тоо)
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
35	35	35	10	10	10	10

Иймд хослолын теорем ёсоор бүх үсэг болон цифрүүдээр зохиож болох ялгаатай дугааруудын тоо $35 \cdot 35 \cdot 35 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 35^3 \cdot 10^4$ болно.

Комбинаторикийн элементүүд

Хэрэв бид сонголтыг $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ гэсэн олонлогийн элементүүдээс хийж байвал энэ олонлогийг **“*n*-хэмжээст эх олонлог”** гэж нэрлэдэг.

Эх олонлогоос тодорхой эрэмбээр сонгон авсан $\{a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \dots, a_{i_k}\}$ гэсэн *k* элементтэй олонлогийг ***k* хэмжээст түүвэр** гэдэг.

Сонгож авсан элементийг буцааж эх олонлогт хийх, үгүй эсэхээс хамааран түүвэр нь **буцаалттай (давталттай), буцаалтгүй (давталтгүй)** гэсэн 2 янз байна. Хэрэв сонгосон элемент бүрээ буцааж эх олонлогт хийж дахин сонгогдох боломжтой түүврийг **буцаалттай түүвэр** гэнэ. Эсрэг тохиолдолд **буцаалтгүй** түүвэр гэнэ.

Комбинаторикийн үндсэн элементүүд болох дараах ойлголтуудыг авч үзье.

1. Буцаалттай түүвэр (Давталттай гүйлгэмэл):

$\Omega = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ гэсэн n -хэмжээст эх олонлогоос буцаалттай түүврийн аргаар авсан k -хэмжээст эрэмбэлэгдсэн (байрлал хамаарах) түүврийн тоог **буцаалттай түүвэр** буюу **давталттай гүйлгэмэл** гэж нэрлээд $\overline{A_n^k}$ гэж тэмдэглэдэг.

Эх олонлогийн элементүүдийг буцаалттай түүврийн аргаар авч байгаа тул k -хэмжээст эрэмбэлэгдсэн түүврийн k -ширхэг элемент бүрийн хувьд n -ширхэг боломжтой. Ө.х

$$\begin{array}{ccccccc} (1) & (2) & (3) & \dots & \dots & \dots & (k) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & \downarrow \\ n & n & n & & & & n \end{array}$$

Иймд хослолын теорем буюу үржих дүрэм ёсоор

$$\overline{A_n^k} = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k\text{-ширхэг}} = n^k$$

- Жишээ 4:** а). Шоог 2 удаа хаяхад илэрч болох бүх боломжийн тоог ол.
б). Зоосыг к удаа хаяхад бууж болох бүх боломжийн тоог ол.

Бодолт:

а). Шоо нь 6 нүдтэй бөгөөд шооны 1-р болон 2-р хаялтууд ялгаатай байх учир 6 элементтэй эх олонлогоос 2 элементтэйгээр авсан буцаапттай түүврийн тоотой тэнцүү болно. Өөрөөр хэлбэл $\overline{A}_6^2 = 6^2 = 36$ байна.

б). Зоос нь тоо(Т) ба сүлд(С) гэсэн 2 янзаар л унана. Иймд зоосыг к удаа хаяхад бууж болох бүх боломжийн тоо нь 2 элементтэй олонлогоос к элементтэйгээр авсан буцаалттай түүврийн тоотой буюу $\overline{A}_2^k = 2^k$ байна.

Тухайлбал, к=2 бол {ТТ, СТ, ТС, ТТ} буюу $\overline{A}_2^2 = 2^2 = 4$ байна.

2. Буцаалтгүй түүвэр (Давталтгүй гүйлгэмэл):

$\Omega = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ гэсэн n -хэмжээст эх олонлогоос буцаалтгүй түүврийн аргаар авсан k -хэмжээст эрэмбэлэгдсэн (байрлал хамаарах) түүврийн тоог **буцаалтгүй түүвэр** буюу **давталтгүй гүйлгэмэл** гэж нэрлээд A_n^k гэж тэмдэглэдэг.

Эх олонлогийн элементүүдийг буцаалтгүй түүврийн аргаар авч байгаа тул k -хэмжээст эрэмбэлэгдсэн түүврийн k -ширхэг элемент бүр нь ялгаатай. Өөрөөр хэлбэл

$$\begin{array}{ccccccc} (1) & & (2) & & (3) & & \dots & & (k) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ n & & (n-1) & & (n-2) & & & & (n-k+1) \end{array}$$

$$A_n^k = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) =$$

$$= n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) \cdot \frac{(n-k)(n-k-1)\dots\cdot 2 \cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\dots\cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

гэж олдоно.

Жишээ 5: Бичлэгтээ “0” гэсэн цифр агуулаагүй, бүх цифр нь ялгаатай 5 оронтой тоо хичнээн байх вэ?

Бодолт:

Бичлэгтээ “0” гэсэн цифр агуулаагүй гэдгээс $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ гэсэн 9 элементтэй эх олонлогоос сонгоно. Бүх цифр нь ялгаатай гэдгээс

буцаалтгүй түүврийн аргаар сонгоно гэсэн үг юм. Иймд $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

ёсоор $A_9^5 = \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9!}{(9-5)!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120$ ширхэг тоо байна.

3. Сэлгэмэл:

$\Omega = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ гэсэн n -хэмжээст эх олонлогоос буцаалтгүй түүврийн аргаар авсан n -хэмжээст эрэмбэлэгдсэн (байрлал хамаарах) түүврийн тоог **сэлгэмэл** гэж нэрлээд P_n гэж тэмдэглэдэг.

Буцаалтгүй түүврийн үед сэлгэмэл нь $k = n$ байх тул өмнөх томьёо ёсоор

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

болно. /Энд $0! = 1$ байдгийг ашиглав/

Нэг сэлгэмэл нь нөгөөгөөсөө зөвхөн элементийнхээ эрэмбээрээ ялгагдана.

Жишээ 6: а) 5 хүү, 6 охиныг нэг эгнээнд хэдэн янзаар зэрэгцүүлэн суулгаж болох вэ?

б) 5 хүү, 6 охиныг нэг эгнээнд охидууд нь нэг дор сууж байхаар хэдэн янзаар зэрэгцүүлэн суулгаж болох вэ?

Бодолт:

а) 5 хүү, 6 охин нийлээд 11 хүүхэд нэг эгнээнд зэрэгцэж сууна гэдэг нь эдгээр хүүхдүүдийг сэлгэн байрлуулах сэлгэмлийн тоог олно гэсэн үг юм.

Иймд $P_{11} = 11!$ Янзаар сэлгэн суулгаж болно.

б) 5 хүү, 6 охиныг нэг эгнээнд охидууд нь нэг дор сууж байхаар тооцохдоо 6 охиныг нэг хүн гэж үзвэл нийт $5+1=6$ хүнийг сэлгэж суулгана гэсэнтэй ижил болно. Иймд $P_6 = 6!$ болно. Мөн 6 охин нь дотроо сэлгэж суух байрлалын тоо бас $P_6 = 6!$ болох тул үржих дүрэм ёсоор бодлогын хариу нь $6! \cdot 6!$ гэж гарна.

4. Хэсэглэл:

$\Omega = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ олонлогоос $k < n$ байх k - хэмжээст буцаалтгүй түүвэр авъя. Буцаалтгүй түүврийн хувьд эрэмбээрээ ялгагдахгүй, элементийн бүрэлдэхүүнээрээ ялгагдах түүврүүдийн тоо нь **хэсэглэл** болно.

Өөрөөр хэлбэл Ω -аас авсан бүрэлдэхүүнээрээ ялгагдах k - элементтэй дэд олонлогуудын тоог **хэсэглэл** гэж нэрлээд C_n^k гэж тэмдэглэдэг.

Давталтгүй гүйлгэмлийн тоо нь $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ байх бөгөөд түүврийн элементүүд нь эрэмбээрээ ялгагдахгүй гэдгийг тооцвол

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

болно.

Үүнийг мөн хоёр гишүүнтийн Ньютоны биномын коэффициент ч гэж нэрлэдэг.

Жишээ 7: Ангид байгаа 10 сурагчаас 4 хүний бүрэлдэхүүнтэй жижүүрийн багийг хичнээн янзаар сонгож болох вэ?

Бодолт: Энэ 10 элементтэй эх олонлогоос 4 элементээр авсан хэсэглэл

$$\text{буюу } C_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)! \cdot 4!} = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{6! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{4!} = 210 \quad \text{янзаар}$$

сонгон авах боломжтой.

ЧАНАР:

Хэсэглэлийн томъёоноос дараах чанарууд мөрдөн гардаг.

Чанар 1. $C_n^0 = 1$

Чанар 2. $C_n^n = 1$

Чанар 3. $C_n^k = C_n^{n-k}$

Чанар 4. $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$

Чанар 5. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$

БАТАЛГАА:

Дээрх 5 чанарын 3-р болон 5-р чанарыг батлая. Үлдсэн чанаруудыг бие даан батлаарай.

Чанар 3:
$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-(n-k)!(n-k)!} = C_n^{n-k}$$

Чанар 5: Хоёр гишүүнтийн Ньютоны биномын томьёо ёсоор

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n a^0 b^n$$

байдаг. Энэ чанарт байгаа коэффициентүүдийн нийлбэрийг олохын тулд

$a = b = 1$ гэж авахад

$$(1 + 1)^n = C_n^0 1^n 1^0 + C_n^1 1^{n-1} 1^1 + \dots + C_n^k 1^{n-k} 1^k + \dots + C_n^n 1^0 1^n$$

болох буюу

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$$

болох нь батлагдлаа.

5. Бүлгүүдэд хуваах буюу давталттай сэлгэмэл.

$\Omega = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ олонлогийг үл огтлолцох, харгалзан k_1, k_2, \dots, k_m ($k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$) ширхэг элементтэй A_1, A_2, \dots, A_m олонлогуудын нийлбэрт бичих бүх боломжийн тоог давталттай сэлгэмэл буюу полиномын коэффициент гэж нэрлээд

$$P_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}$$

томъёогоор тооцно.

Жишээ 8: $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ олонлогийг үл огтлолцох, харгалзан $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 1$ ширхэг элементтэй A_1, A_2, A_3 олонлогуудын нийлбэрт бичих бүх боломжийн тоог ол.

Бодолт: Өмнө томъёолсон ёсоор

$$P_4(k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 1) = \frac{4!}{1! \cdot 2! \cdot 1!} = 12 \text{ байна.}$$

Энэхүү давталттай сэлгэмлийг ашиглан дараах төрлийн бодлогуудыг бодож болдог.

Жишээ 9: “САНСАР” гэдэг үгийн үсгүүдийг сэлгэх замаар хичнээн ялгаатай үг бүтээж болох вэ?

Бодолт:

Энэ үг нь 6 үсэгтэй бөгөөд “С” үсэг 2 ширхэг, “А” үсэг 2 ширхэг, “Н” үсэг 1 ширхэг, “Р” үсэг 1 ширхэг орсон байна.

Хэрэв бүх үсгийг ялгаатай гэж төсөөлбөл сэлгэмлээр нь бүтээж болох үгийн тоо нь $6! = 720$ болно. Энд 2 ширхэг “С” үсэг нь ялгаатай байхаар тооцогдсон бөгөөд энэ 2 үсгийн байрыг солиход үгийн ялгаа гарахгүй. Иймд $2!$ -д хувааж өгөх ёстой. Үүнтэй адилаар бусад үсгүүдийн хувьд тооцвол

$$P_6(2, 2, 1, 1) = \frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 180 \text{ ширхэг ялгаатай үг бүтээж болно.}$$

Жишээ 10: Монгол хэлний 3 ном, математикийн 5 ном, газарзүйн 7 номыг номын тавиур дээр хичнээн ялгаатай байдлаар нэг эгнээнд зэрэгцүүлэн өрж болох вэ? (Нэг хичээлийн номнуудыг ижил гэж үзнэ.)

Бодолт:

Нийт 15 ном байна. Хэрэв бүх номнуудыг ялгаатай гэж төсөөлбөл сэлгэмлээр нь нэг эгнээнд зэрэгцүүлэн өрөх боломжийн тоо нь $15!$ болно. Энд 3 ширхэг монгол хэлний ном нь хоорондоо ялгаатай байхаар тооцогдсон бөгөөд энэ нэг хичээлийн номнууд ижил болохыг санавал эдгээр 3 номны байрыг солиход өрөлтийн ялгаа гарахгүй. Иймд $3!$ -д хувааж өгөх ёстой. Үүнтэй адилаар бусад номнуудын хувьд тооцвол

$$P_{15}(3, 5, 7) = \frac{15!}{3! \cdot 5! \cdot 7!} \text{ янзаар ялгаатай байдлаар өрж болно.}$$

6. Давталттай хэсэглэл.

$\Omega = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ олонлогоос тус бүрдээ m ширхэг элементтэй бүлгүүд үүсгэе. (Ω -ийн элемент давтагдан орж болно.) Ийм ялгаатай бүлгийн тоог давталттай хэсэглэл гэж нэрлээд

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$$

томъёогоор тооцдог.

Жишээ 11: Дэлгүүрт 3 төрлийн талх байсан бол 4 талхыг хэдэн янзаар авч болох?. (Энд дэлгүүрт талхны төрөл бүрээс дор хаяж 4 байгаа гэж үзнэ)

Бодолт: 3 төрлийн талхнаас авах тул эх олонлогийн элементийн тоо 3 буюу $n = 3$ байна. Энэ талхнаас 4-г авах тул 4 элементтэй бүлэг үүсгэх буюу $m = 4$ байна. Иймд томъёо ёсоор $\overline{C}_3^4 = C_{3+4-1}^4 = C_6^4 = 15$ янзаар авч болно.

Анхаарлаа хандуулсанд баярлалаа